

## Άσκηση 86

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = -\frac{x \cdot f(x)}{x^2+1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ .

Έστω  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Να δείξετε ότι η  $g$  είναι αρχική της  $f$ .

iii) Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να βρεθεί το  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} I(\nu)$ , όπου  $I(\nu) = \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x) dx$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση  $\Phi(x) = \int_0^1 (3x^2t^2 - 2xt \cdot f(t) + f(t)) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

v) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\Phi$  παρουσιάζει ελάχιστο, έστω στο  $x_0$ , και ισχύει  $\Phi(x_0) = \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{e^{3-2\sqrt{2}}}$ .

## Λύση

- i) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως παραγωγίσιμη και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα από συνέπειες Bolzano η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$  και επειδή  $f(0) = 1 > 0$  είναι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = -\frac{x \cdot f(x)}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1}$$

$$(\ln(f(x)))' = \left(-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right)' \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} + c$$

Για  $x = 0$  έχουμε  $\ln(f(0)) = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$

Άρα  $\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$ .

- ii) Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως σύνθεση παραγωγίσιμων με



$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x)$$

Άρα η  $g$  είναι αρχική της  $f$

- iii) Είναι  $g'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

και  $g''(x) = f'(x) = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}^3}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g''$	$+$	$0$	$-$
$g$			

Σ.Κ.  
(0,0)

Η  $g$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα  $g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right) = \mathbb{R}$  διότι

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$
- 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

iv ) Είναι

$$I(v) = \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx = \left[ g(x) \right]_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} = g\left(\frac{2}{v}\right) - g\left(\frac{1}{v}\right)$$

Επειδή η  $g$  είναι συνεχής στο 0 έχουμε

•

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} g\left(\frac{2}{v}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = g(0) = 0$$

•

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{v}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = g(0) = 0$$

Επομένως

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} I(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left( g\left(\frac{2}{v}\right) - g\left(\frac{1}{v}\right) \right) = 0 - 0 = 0$$

v ) Είναι

$$\Phi(x) = \int_0^1 (3x^2t^2 - 2xt \cdot f(t) + f(t)) dt = x^2 \int_0^1 3t^2 dt - 2x \int_0^1 tf(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$$

$$\Phi(x) = x^2 \left[ t^3 \right]_0^1 - 2x \int_0^1 tf(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = x^2 - 2x \int_0^1 tf(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$$

Η  $\Phi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με

$$\Phi'(x) = 2x - 2 \int_0^1 tf(t) dt$$

$$\Phi'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 2 \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow x = \left[ \sqrt{t^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$x$	$-\infty$	$\sqrt{2} - 1$	$+\infty$
$\Phi'$		-	+
$\Phi$	$+\infty$		$+\infty$

OE

Η ελάχιστη τιμή είναι

$$\begin{aligned}\Phi(\sqrt{2}-1) &= (\sqrt{2}-1)^2 \cdot 1 - 2(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}-1) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \\ &= -(\sqrt{2}-1)^2 + \left[ g(t) \right]_0^1 = -(3-2\sqrt{2}) + g(1) - g(0) = \ln(1+\sqrt{2}) - (3-2\sqrt{2}) = \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln e^{3-2\sqrt{2}} = \ln \frac{1+\sqrt{2}}{e^{3-2\sqrt{2}}}\end{aligned}$$