Άσκηση 87

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x \ln x - 4x - x^2$.

i) Να μελετήσετε την f' ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(e^x)dx < 3 - 4e$.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

iv) Να αποδείξετε ότι η C_f και η C_φ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρεθεί η εξίσωσή της.

Λύση

i) Είναι

$$f(x) = 2x\ln x - 4x - x^2 \ ,\ x \in (0,+\infty)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = 2\ln x - 2x - 2$ και $f''(x) = \dfrac{2}{x} - 2 = \dfrac{2-2x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f'		$-\infty \nearrow$	-4	$\searrow -\infty$	
			ΟΜ		

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2\ln x - 2x - 2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{2\ln x}{x} - 2 - \frac{2}{x}\right)\right] = (+\infty)(0-2-0) = -\infty$$

άρα $f'((0,+\infty)) = (-\infty,-4]$

ii) Είναι $f'(x) \le -4 < 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

άρα για $x \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le -5 < 0$

$$E = \int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e (x^2 + 4x - 2x\ln x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_1^e - \int_1^e 2x\ln x dx$$

$$\int_1^e 2x\ln x dx = \left[x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e x dx = e^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{2}$$

$$E = \left(\frac{e^3-1}{3} + 2e^2 - 2\right) - \left(\frac{e^2+1}{2}\right) = \frac{e^3}{3} + \frac{3e^2}{2} - \frac{17}{6}$$

iii) Είναι $f''(x) = \dfrac{2-2x}{x}$, $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f					
			ΣΚ		
			$(1,-5)$		

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon : y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - (-5) = -4(x-1) \Rightarrow y = -4x - 1$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη ε με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή: $f(x) \leq -4x - 1$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και το = μόνο για $x = 1$

Για $x \in [0,1]$ ισχύει $e^x \geq 1$, οπότε έχουμε $f(e^x) \leq -4e^x - 1$. Άρα

$$\int_0^1 f(e^x)dx < \int_0^1 (-4e^x - 1)dx = \Big[-4e^x - x\Big]_0^1 = 3 - 4e$$

iv) Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, \varphi(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_φ με την κοινή εφαπτομένη. Πρέπει να ισχύει $f'(x_1) = \varphi'(x_2)$

Η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $f'(1) = -4$, επομένως $f'(x) \leq -4$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

$\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $\varphi'(x) = x^2 - 4$

Είναι $\varphi'(x) \geq -4$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα η μοναδική περίπτωση να ισχύει $f'(x_1) = \varphi'(x_2)$ είναι όταν

$$f'(x_1) = -4 \text{ και } \varphi'(x_2) = -4 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 0$$

Για $x_1 = 1$ η εφαπτομένη της C_f είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = -4x - 1$

Για $x_2 = 0$ η εφαπτομένη της C_φ είναι $y - \varphi(0) = \varphi'(0)(x - 0) \Rightarrow y = -4x - 1$

άρα η $y = -4x - 1$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_φ