Άσκηση 88

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2x^2 + 2 & , \ x \geq 1 \\ x^2 + 3x & , \ x < 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x \ln x + \dfrac{2}{3}x^3 + x & , \ x \geq 1 \\ \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{6} & , \ x < 1 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι παράγουσα της f.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η C_g δέχεται μοναδική εφαπτομένη που τη διαπερνά και να βρεθεί η εξίσωσή της.

iv) Να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια να βρεθεί.

v) Να αποδείξετε ότι η $y = 5x - 1$ τέμνει τη C_g σε 3 ακριβώς σημεία.

Λύση

i)
- Η g είναι παραγωγίσιμη για $x > 1$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = \ln x + 1 + 2x^2 + 1 = \ln x + 2x^2 + 2 = f(x)$$

- Η g είναι παραγωγίσιμη για $x < 1$ ως πολυωνυμική με

$$g'(x) = x^2 + 3x = f(x)$$

-

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x + \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{5}{3}}{x - 1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1^+} (\ln x + 1 + 2x^2 + 1) = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{11}{6}}{x - 1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1^-} (x^2 + 3x) = 4$$

άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1) = 4 = f(1)$.

Συνεπώς, $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι παράγουσα της f

ii) Είναι $g'(x) = f(x)$ και

για $x \geq 1$ είναι $f(x) > 0$ και για $x < 1$ είναι $f(x) = x(x + 3)$

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Επειδή η g είναι συνεχής και $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, το σύνολο τιμών είναι $g(A) = \mathbb{R}$

iii) Είναι $g''(x) = f'(x)$

- Για $x > 1$: $g''(x) = \frac{1}{x} + 4x > 0$
- Για $x < 1$: $g''(x) = (x^2 + 3x)' = 2x + 3$

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		1		$+\infty$
g''		$-$	0	$+$		$+$	
g							

ΣΚ

$(-\frac{3}{2}, \frac{25}{12})$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ και η g'' εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{25}{12}\right)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_g. Συνεπώς, η εφαπτομένη στο A είναι η μοναδική που διαπερνά τη γραφική παράσταση της g.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι

$$y - g\left(-\frac{3}{2}\right) = g'\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{25}{12} = f\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$(\varepsilon) : y = -\frac{9}{4}x - \frac{31}{24}$$

iv)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + 2x^2 - 2}{x - 1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{x} + 4x) = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x + 4) = 5$$

Άρα $f'(1) = 5$ και η εφαπτομένη είναι $y - 4 = 5(x - 1) \Rightarrow y = 5x - 1$

v) Θέτω $h(x) = g(x) - 5x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $h'(x) = f(x) - 5$

- Για $x < 1$: $h'(x) = x^2 + 3x - 5$ με ρίζα $\rho_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{29}}{2}$
- Για $x \geq 1$: $h'(x) = \ln x + 2x^2 - 3$ με ρίζα $\rho_2 > 1$ (αφού $h'(1) = -1$ και h' γν. αύξουσα).

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$h(\rho_1) > 0$	$\searrow$	$h(\rho_2) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

Επειδή $\rho_1 < 0 < 1$ το 0 ανήκει στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ όπου η h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $h(\rho_1) > h(0) = -\dfrac{1}{6} + 1 = \dfrac{5}{6} > 0$. Άρα $h(\rho_1) > 0$

Επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_1, \rho_2]$ και $1 \in (\rho_1, \rho_2)$, επομένως ισχύει $h(\rho_2) < h(1) = \dfrac{5}{3} - 4 = -\dfrac{7}{3} < 0$

Εφόσον η h είναι συνεχής με $h(\rho_1) > 0$ και $h(\rho_2) < 0$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$ άρα έχει 3 ακριβώς ρίζες.