Άσκηση 89

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(x^2+1)f'(x)=(x+1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=\ln(2e)$

Επίσης, F αρχική τη f με $F(0)=0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(x^2+1)+x\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) α΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β΄) Να δείξετε ότι $f\left(f(x)\right)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι $\left|\int_0^1\left(f(x)-\frac{2}{3}\right)dx\right|<\frac{1}{6}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3F(x)=x+\int_0^1 f(t)dt$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2\int_0^1 f(t)dt-1}{x-1}+\dfrac{\int_{-1}^1 F''(x)dx}{x}=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

i) Έχουμε

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = (x + \ln(x^2+1))'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \ln(x^2+1) + x + c$$

Για $x = 1$ έχουμε

$$f(1) = \ln 2 + 1 + c \Leftrightarrow \ln(2e) = \ln(2e) + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $f(x) = \ln(x^2+1) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) α΄) Είναι

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

$f'(x) \geq 0$ και η f συνεχής στο -1, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Επίσης

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

ΣΚ $A(-1, \ln 2 - 1)$ ΣΚ $B(1, \ln 2 + 1)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[x \left(1 + \frac{\ln(x^2+1)}{x} \right) \right] = (-\infty)\cdot(1+0) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln(x^2+1)+x]=+\infty$$

Άρα $f(A)=\mathbb{R}$

β΄) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+1\geq 1\Leftrightarrow \ln(x^2+1)\geq 0\Leftrightarrow x+\ln(x^2+1)\geq x\Leftrightarrow f(x)\geq x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το = μόνο $x=0$ Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε

$$f(x)\geq x\overset{f\text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(f(x))\geq f(x)\geq x$$

και το = μόνο $x=0$

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left|\int_0^1\left(f(x)-\frac{2}{3}\right)dx\right|<\frac{1}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\frac{2}{3}dx<\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<\int_0^1 f(x)dx-\frac{2}{3}<\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\int_0^1 f(x)dx<\frac{5}{6}$$

- ισχύει $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα μόνο για $x=0$, άρα

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 xdx\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

- για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\leq x-1$ και το = για $x=1$, άρα

  $\ln(x^2+1)\leq x^2\Rightarrow f(x)\leq x^2+x$ με την ισότητα μόνο για $x=0$

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1(x^2+x)dx\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx<\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

Άρα

$$\frac{1}{2}<\int_0^1 f(x)dx<\frac{5}{6}$$

iv) Είναι

$$3F(x)=x+\int_0^1 f(t)dt\Rightarrow 3F(x)=x+(F(1)-F(0))\Rightarrow 3F(x)=x+F(1)$$

Θέτω $h(x)=3F(x)-x-F(1)$, $x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

- $h(0) = 3F(0) - F(1) = -F(1)$

  Επειδή $f(x) > 0$ για $x > 0$ η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα

  $F(1) > F(0) = 0$, οπότε $h(0) < 0$

- $h(1) = 3F(1) - 1 - F(1) = 2F(1) - 1$

  Ισχύει $\int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) - F(0) > \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) > \frac{1}{2}$, άρα

  $2F(1) > 1 \Rightarrow h(1) > 0$

άρα $h(0) \cdot h(1) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

v) Είναι

$$\frac{2\int\limits_0^1 f(t)dt - 1}{x-1} + \frac{\int\limits_{-1}^1 F''(x)dx}{x} = 0 \Leftrightarrow x\left(2\int_0^1 f(t)dt - 1\right) + (x-1)\int_{-1}^1 F''(x)dx = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x\left(2\int_0^1 f(t)dt - 1\right) + (x-1)\int_{-1}^1 F''(x)dx\ ,\ x \in [0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0) = \int_{-1}^1 F''(x)dx = \left[F'(x)\right]_{-1}^1 = f(1) - f(-1) > 0$

  διότι $-1 < 1 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(-1) < f(1)$

- $g(1) = 2\int_0^1 f(t)dt - 1 > 0$

  διότι $\int_0^1 f(t)dt > \frac{1}{2}$

Επειδή $g(0) \cdot g(1) < 0$ από Θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ και g πολυώνυμο 1ου βαθμού, άρα η ρίζα είναι μοναδική