Άσκηση 9

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln(x+1) + 1 \leq f(x) \leq e^x$ για κάθε $x \geq 0$. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = axf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M\,(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.

ii) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $N\,(0, g(0))$ να είναι παράλληλη στην (ε).

Έστω $\alpha = 1$

iii) Αν $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $\ln 4 - \dfrac{3}{4} \leq E(\Omega) \leq e - 2$.

Λύση

i) Για $x = 0$ από τη σχέση $\ln(x+1)+1 \le f(x) \le e^x$ παίρνουμε $\ln 1 + 1 \le f(0) \le e^0$ δηλαδή $1 \le f(0) \le 1$ άρα $f(0) = 1$

Για $x > 0$ έχουμε

$$\ln(x+1)+1 \le f(x) \le e^x \Leftrightarrow \ln(x+1) \le f(x) - f(0) \le e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le \frac{e^x-1}{x}$$

με

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$

οπότε $\varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{4}$

ii) $g(x) = \alpha x f(x)$ και $g'(x) = \alpha\big(f(x) + x f'(x)\big)$

Αφού εφαπτομένη της C_g στο $N(0, g(0))$ είναι παράλληλη στην (ε) τότε έχουν την ίδια κλίση. Επομένως

$g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow \alpha f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

iii) $E(\Omega) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (1-x) f(x)\,dx$

Από την υπόθεση $\ln(x+1)+1 \le f(x) \le e^x$ και επειδή $1 - x \ge 0$ στο $[0,1]$ προκύπτει $(1-x)\big(\ln(x+1)+1\big) \le (1-x)f(x) \le (1-x)e^x$

Οπότε $\int_0^1 (1-x)\big(\ln(x+1)+1\big)\,dx \le E(\Omega) \le \int_0^1 (1-x)e^x\,dx$

Έχουμε

$$\int_0^1 (1-x)\big(\ln(x+1)+1\big)\,dx = \int_0^1 (1-x)\ln(x+1)\,dx + \int_0^1 (1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big(2-(x+1)\Big)\ln(x+1)\,dx + \Big[x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 2\int_0^1 \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 (x+1)\ln(x+1)\,dx + \frac{1}{2}$$

όπου

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \Big[x\ln(x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \Big[x\ln(x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx$$

$$= \ln 2 - \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1$$

και

$$\int_0^1 (x+1)\ln(x+1)\,dx = \Big[\frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1)\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)\,dx =$$

$$\Big[\frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1)\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} + x\Big]_0^1 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Άρα

$$\int_0^1 (1-x)\big(\ln(x+1)+1\big)\,dx = 2(2\ln 2 - 1) - \Big(2\ln 2 - \frac{3}{4}\Big) + \frac{1}{2} = 2\ln 2 - \frac{3}{4} = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

και

$$\int_0^1 (1-x)e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx - \int_0^1 xe^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^1 - \Big[xe^x - e^x\Big]_0^1 = (e-1) - 1 = e - 2$$

Συνεπώς $\ln 4 - \dfrac{3}{4} \le E(\Omega) \le e - 2$