

Άσκηση 90

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x - e^{2x} - 1 + f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x + \frac{1}{4}f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Έστω $f(x) = e^{2x} + x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ και $h = f \circ g$.

ii) Να δείξετε ότι $h(x) = e^{2x^3} + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να δείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h^{-1} .

iv) α) Να βρείτε το σημείο τομής της $C_{h^{-1}}$ με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $h(f(x) - 1) + h^{-1}(x^3 + x + 1) \leq 1$.

v) Σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = H(x)$, όπου H αρχική της h και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 cm/sec . Έστω ϕ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_H στο σημείο M με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ϕ τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι ίση με 1.

vi) α) Αν $H(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 xH(x)dx > \frac{1}{3}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{7}{4} < \int_0^1 h(x)dx < e^2 + 1$.

Λύση

i) Είναι

$$f(x) = x - e^{2x} - 1 + f'(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - 2e^{2x} + f''(x) \quad (1)$$

και

$$f(x) = x + \frac{1}{4}f''(x) \Leftrightarrow f''(x) = 4f(x) - 4x \quad (2)$$

άρα

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f'(x) = 1 - 2e^{2x} + 4f(x) - 4x$$

οπότε

$$f(x) = x - e^{2x} - 1 + 1 - 2e^{2x} + 4f(x) - 4x \Rightarrow 3f(x) = 3e^{2x} + 3x \Rightarrow f(x) = e^{2x} + x$$

ii) Είναι

$$D_h = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

και

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = e^{2x^3} + x^3$$

iii) Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = 6x^2 e^{2x^3} + 3x^2 = 3x^2(2e^{2x^3} + 1)$$

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο 0, η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Άρα η h είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Έχουμε

$$D_{h^{-1}} = h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = \mathbb{R}$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x^3} + x^3) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x^3} + x^3) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

iv) α') Για να βρούμε που η $C_{h^{-1}}$ τέμνει τον $x'x$ λύνουμε

$$h^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = h(0) \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα το σημείο είναι το $(1, 0)$

β') Είναι

$$\underbrace{h(f(x) - 1)}_{K(x)} + \underbrace{h^{-1}(x^3 + x + 1)}_{\Lambda(x)} \leq 1$$

$$\text{Θέτω } \Phi(x) = K(x) + \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Κατασκευαστικά δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις K και Λ είναι γνησίως αύξουσες στο \mathbb{R} . Ομοίως προκύπτει ότι και η $\Phi(x) = K(x) + \Lambda(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Παρατηρούμε ότι

$$\Phi(0) = h(f(0) - 1) + h^{-1}(1) = h(0) + h^{-1}(1) = 1 + 0 = 1$$

άρα η ανίσωση γίνεται

$$\Phi(x) \leq 1 \Leftrightarrow \Phi(x) \leq \Phi(0) \stackrel{\Phi \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} x \leq 0$$

v) Έστω $x(t)$ η τετμημένη του σημείου M τη χρονική στιγμή t με $x'(t) = 2 \text{ cm/sec}$

Είναι

$$\varepsilon\phi\phi = H'(x) = h(x) \Rightarrow \varepsilon\phi\phi(t) = h(x(t))$$

άρα

$$(\varepsilon\phi\phi(t))' = (h(x(t)))' \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}^2\phi(t)} \cdot \phi'(t) = h'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$\text{Όμως } \frac{1}{\text{συν}^2\phi} = 1 + \varepsilon\phi^2\phi \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}^2\phi(t)} = 1 + h^2(x(t))$$

οπότε

$$[1 + h^2(x(t))] \cdot \phi'(t) = h'(x(t)) \cdot x'(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{h'(x(t)) \cdot x'(t)}{1 + h^2(x(t))}$$

τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0) = 1$ άρα

$$\phi'(t_0) = \frac{h'(1) \cdot 2}{1 + h^2(1)} = \frac{(6e^2 + 3) \cdot 2}{1 + (e^2 + 1)^2} = \frac{12e^2 + 6}{e^4 + 2e^2 + 2} \text{ rad/sec}$$

vi) α) Η H είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$H'(x) = h(x) \text{ και } H''(x) = h'(x) = 3x^2(2e^{2x^3} + 1)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
H''	$+$	0	$+$
H			

Η εφαπτομένη της C_H στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση

$$y - H(0) = H'(0)(x - 0) \Rightarrow y = h(0)x \Rightarrow y = x$$

η H είναι κυρτή άρα η C_H βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $H(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$. Άρα

$$xH(x) \geq x^2 \Rightarrow \int_0^1 xH(x)dx > \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

β') Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{7}{4} < \int_0^1 h(x)dx < e^2 + 1$

- Είναι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$. Άρα

$$e^{2x^3} \geq 2x^3 + 1 \Rightarrow e^{2x^3} + x^3 \geq 3x^3 + 1 \Rightarrow h(x) \geq 3x^3 + 1$$

και το = μόνο για $x = 0$, οπότε

$$\int_0^1 h(x)dx > \int_0^1 (3x^3 + 1)dx = \left[3\frac{x^4}{4} + x \right]_0^1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

- Η h είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$x \leq 1 \Rightarrow h(x) \leq h(1) \Rightarrow h(x) < e^2 + 1$$

άρα

$$\int_0^1 h(x)dx < \int_0^1 (e^2 + 1)dx = (e^2 + 1)(1 - 0) = e^2 + 1$$

Συνεπώς

$$\frac{7}{4} < \int_0^1 h(x)dx < e^2 + 1$$