Άσκηση 91

Δίνεται συνάρτηση $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g''(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$, $g(0) = 2$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \frac{\pi}{4}$ είναι κάθετη στην ευθεία $3x + 6y + 1 = 0$.

i) Να δείξετε ότι $g(x) = -\ln(\text{συν}x) + x + 2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g^{-1}.

Έστω G μία αρχική της g με $G(0) = 0$

iii) α΄) Να αποδείξετε ότι $E(\Omega) > \frac{\pi - 3}{6}$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, την $y = x + 2$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.

β΄) Να δείξετε ότι $2G(x) \geq x^2 + 4x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ΄) Να δείξετε ότι $\int_0^1 xG'(x)dx < G(1) - \frac{7}{6}$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{g(\text{ημ}x) - G(x^2 + x) - 2}{x}$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{συν}x G''(x)dx$.

vi) α΄) Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $G(x) = \frac{1}{2026^2 \cdot x}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{2026}\right)$.

Λύση

i) Είναι $g''(x) = (\text{εφ}x)'$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, άρα $g'(x) = \text{εφ}x + c$

Η ευθεία $\varepsilon : 3x + 6y + 1 = 0$ έχει κλίση $\lambda = -\frac{1}{2}$. Επειδή η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ είναι κάθετη στην ε έχουμε ότι $g'(\frac{\pi}{4}) = 2$

$2 = \text{εφ}\frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = 1$, οπότε $g'(x) = \text{εφ}x + 1$

$g'(x) = \text{εφ}x + 1 \Rightarrow g'(x) = (-\ln(\text{συν}x) + x)' \Rightarrow g(x) = -\ln(\text{συν}x) + x + c$

Για $x = 0$: $g(0) = 2 \Rightarrow 0 + 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$

Άρα $g(x) = -\ln(\text{συν}x) + x + 2$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

ii) Είναι $g'(x) = \text{εφ}x + 1 > 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς 1-1 και αντιστρέψιμη

Είναι

$$D_{g^{-1}} = g(A) = [g(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x)) = [2, +\infty)$$

iii) α′) Είναι

$$E(\Omega) = \int_0^1 |g(x) - (x+2)| dx = \int_0^1 |-\ln(\text{συν}x)| dx$$

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\text{συν}x \in (0, 1]$ οπότε $\ln(\text{συν}x) \leq 0$ άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 -\ln(\text{συν}x) dx$$

Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και το = μόνο για $x = 1$ οπότε

$$\ln(\text{συν}x) \leq \text{συν}x - 1 \Rightarrow -\ln(\text{συν}x) \geq 1 - \text{συν}x$$

και το = για $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Άρα

$$E(\Omega) > \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \text{συν}x) dx = \left[x - \text{ημ}x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{6}$$

β′) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = 2G(x) - x^2 - 4x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

Η ϕ είναι παραγωγίσιμη με

$$\phi'(x) = 2G'(x) - 2x - 4 = 2g(x) - 2x - 4 = -2\ln(\text{συν}x) \geq 0$$

αφού για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $0 < \text{συν}x \leq 1$ άρα $\ln(\text{συν}x) \leq 0$

Συνεπώς η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$ άρα για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ έχουμε

$$x \geq 0 \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(0) \Rightarrow 2G(x) - x^2 - 4x \geq 2G(0) = 0 \Rightarrow 2G(x) \geq x^2 + 4x$$

γ΄) Είναι

$$\int_0^1 xG'(x)dx = \Big[xG(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 G(x)dx = G(1) - \int_0^1 G(x)dx$$

όμως $G(x) \geq \frac{x^2}{2} + 2x$ και το = μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int_0^1 G(x)dx > \int_0^1 \frac{x^2}{2} + 2xdx = \Big[\frac{x^3}{6} + x^2\Big]_0^1 = \frac{7}{6}$$

οπότε

$$\int_0^1 xG'(x)dx = G(1) - \int_0^1 G(x)dx < G(1) - \frac{7}{6}$$

iv) Είναι

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{g(\text{ημ}x) - G(x^2+x) - 2}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{g(\text{ημ}x) - 2}{x} - \frac{G(x^2+x)}{x}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(\text{ημ}x) - g(0)}{\text{ημ}x} \cdot \frac{\text{ημ}x}{x} - \frac{G(x^2+x)}{x}\right] = 1 \cdot 1 - 2 = -1$$

διότι

- $$\lim_{x\to 0} \frac{g(\text{ημ}x) - g(0)}{\text{ημ}x} \overset{u=\text{ημ}x}{=} \lim_{u\to 0} \frac{g(u) - g(0)}{u} = g'(0) = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{G(x^2+x)}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{G'(x^2+x)\cdot(2x+1)}{1} =$$
  $$\lim_{x\to 0}[g(x^2+x)\cdot(2x+1)] \overset{g\ \text{συν/ης}}{=} g(0)\cdot 1 = 2$$

v) Έχουμε

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{συν}xG''(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{συν}xg'(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{συν}x(\text{εφ}x + 1)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\text{ημ}x + \text{συν}x)dx = \Big[-\text{συν}x + \text{ημ}x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

vi) α΄) Είναι $G'(x) = g(x) > 0$ αφού $g(A) = [2, +\infty)$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

και $G''(x) = g'(x) = \text{εφ}x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεπώς η G είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

β΄) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xG(x) - \frac{1}{2026^2}$, $x \in \left[0, \frac{1}{2026}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{2026}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$f(0) = 0 \cdot G(0) - \frac{1}{2026^2} = -\frac{1}{2026^2} < 0$

Επειδή η G είναι κυρτή η γραφική παράσταση της G βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο $x_0 = 0$, η οποία είναι η $y = g(0)x = 2x$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα $G(x) > 2x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Για $x = \frac{1}{2026}$ έχουμε $G\left(\frac{1}{2026}\right) > \frac{2}{2026}$

άρα $f\left(\frac{1}{2026}\right) = \frac{1}{2026}G\left(\frac{1}{2026}\right) - \frac{1}{2026^2} > \frac{1}{2026} \cdot \frac{2}{2026} - \frac{1}{2026^2} = \frac{1}{2026^2} > 0$

οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{1}{2026}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

και $f'(x) = G(x) + xg(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2026})$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα είναι μοναδική