Άσκηση 92

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + 3xf^2(x) = 0$ και $f(0) = 1$.

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

ii) Αν $f(x) = \dfrac{4}{4+3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε

α΄) το σύνολο τιμών της f.

β΄) το εμβαδόν E του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, όπου $\mathrm{A}(x,0)$, $\mathrm{B}(x, f(x))$, $\Gamma(-x, f(x))$ και $\Delta(-x,0)$ με $x > 0$.

γ΄) το x ώστε το εμβαδόν E του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.

iii) Σημείο $M(x,y)$, $x \geq 0$ κινείται πάνω στη C_f . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E του ορθογωνίου ΑΒΓΔ , τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται μέγιστο.

iv) Αν $x \geq 0$ να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

Έστω F αρχική της f με $F(1) = 1$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx$.

vi) Να αποδείξετε ότι $F(\eta\mu^2 x) + F\left(\ln(x^2+1)\right) - 2F(x^2) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vii) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\eta\mu x)dx < \frac{3\pi}{14} + \frac{4}{7}$.

viii) Να αποδείξετε ότι $\ln F(x)^{F(x)} \geq (x-1)f(x)$ για κάθε $x \geq 1$.

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$2f'(x) = -3xf^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{3x}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{3x^2}{4}\right)'$$

Επομένως $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{3x^2}{4} + c$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$ οπότε $1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$. Άρα

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{3x^2+4}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3x^2+4} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

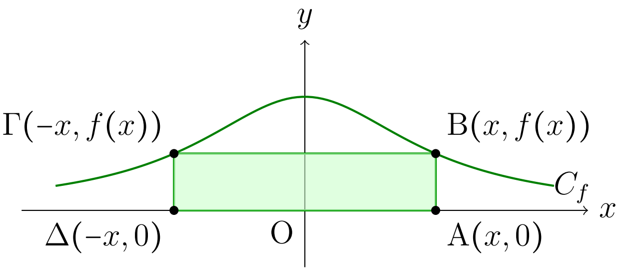
ii) α′) Είναι $f'(x) = -\dfrac{4(3x^2+4)'}{(3x^2+4)^2} = -\dfrac{24x}{(3x^2+4)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
			OM		

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{3x^2} = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{3x^2} = 0 \text{ άρα } f(A) = (0,1]$$

β′) Το ορθογώνιο έχει βάση (ΑΒ) $= 2x$ και ύψος (ΒΓ) $= f(x)$ άρα

$$E(x) = 2x \cdot f(x) = \frac{8x}{3x^2+4} \ , \ x > 0$$



γ′) Είναι

$$E'(x) = \frac{8(3x^2+4) - 8x(6x)}{(3x^2+4)^2} = \frac{24x^2 + 32 - 48x^2}{(3x^2+4)^2} = \frac{32 - 24x^2}{(3x^2+4)^2}$$

και

$$E'(x) = 0 \Rightarrow 24x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \overset{x>0}{\Rightarrow} x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
E'		$+$	0	$-$	
E	0	$\nearrow$	OM	$\searrow$	0

Άρα το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

iii) Είναι

$$E = 2x \cdot f(x) \Rightarrow E(t) = 2x(t) \cdot f(x(t))$$

άρα

$$\mathrm{E}'(t) = 2x'(t)f(x(t)) + 2x(t)f'(x(t))x'(t)$$

$$\mathrm{E}'(t) = 2x'(t)\left[f(x(t)) + x(t)f'(x(t))\right]$$

άρα για $t = t_0$ έχουμε

$$\mathrm{E}'(t_0) = 2x'(t_0)\left[f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$\mathrm{E}'(t_0) = 2x'(t_0)\left[\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right] = 2x'(t_0)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4}\right) = 2x'(t_0) \cdot 0 = 0$$

iv) Στο $[0, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται

Θέτω $y = \dfrac{4}{3x^2 + 4} \Leftrightarrow 3x^2y + 4y = 4 \Leftrightarrow 3x^2y = 4 - 4y \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4(1-y)}{3y}$

Επειδή $x \geq 0$ έχουμε $x = \sqrt{\dfrac{4(1-y)}{3y}}$. Άρα

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4 - 4x}{3x}}\ ,\ x \in f([0, +\infty)) = (0, 1]$$

v) Είναι

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (x)'F(x)dx = \Big[xF(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx =$$

$$F(1) - \int_0^1 xf(x)dx = 1 - \int_0^1 \frac{4x}{3x^2+4}dx = 1 - \frac{2}{3}\Big[\ln(3x^2+4)\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{3}(\ln 7 - \ln 4)$$

vi) Είναι $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x| \Rightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2$

για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1 \Rightarrow \ln(x^2 + 1) \leq x^2$

Επομένως

$$ημ^2 x \le x^2 \Rightarrow F(ημ^2 x) \le F(x^2)$$

$$\ln(x^2+1) \le x^2 \Rightarrow F(\ln(x^2+1)) \le F(x^2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$F(ημ^2 x) + F(\ln(x^2+1)) \le 2F(x^2) \Leftrightarrow F(ημ^2 x) + F(\ln(x^2+1)) - 2F(x^2) \le 0$$

vii) Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $F''(x) = f'(x) = -\dfrac{24x}{(3x^2+4)^2}$

Για $x > 0$ είναι $F''(x) < 0$, άρα η F είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο $x_0 = 1$ είναι

$$y - F(1) = f(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}$$

Επειδή η F είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $F(x) \le \dfrac{4}{7}x + \dfrac{3}{7}$ για κάθε $x \ge 0$ και το $=$ μόνο για $x = 1$

Για $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ είναι $ημx \in [0, 1]$ άρα $F(ημx) \le \dfrac{4}{7}ημx + \dfrac{3}{7}$ και το $=$ μόνο για $ημx = 1$ άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(ημx)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{7}ημx + \frac{3}{7}\right) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(ημx)dx < \left[-\frac{4}{7}συνx + \frac{3}{7}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{14} + \frac{4}{7}$$

viii) <u>α΄ τρόπος</u>

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x \ge 1$ ισχύει $F(x) \ge F(1) = 1 > 0$

Για κάθε $x \ge 1$ θέλουμε να δείξουμε

$$\ln F(x)^{F(x)} \ge (x-1)f(x) \Leftrightarrow F(x)\ln F(x) \ge (x-1)f(x)$$

- Για $x = 1$ η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα αφού $1 \cdot \ln 1 \ge 0 \cdot f(1) \Rightarrow 0 \ge 0$
- Θεωρώ τη συνάρτηση

$$h(x) = F(x)\ln F(x)\ ,\ \ x \ge 1$$

$$h'(x) = f(x)\ln F(x) + F(x)\frac{1}{F(x)}f(x) = f(x)(\ln F(x) + 1)$$

Για $x > 1$ από ΘΜΤ για την h στο $[1, x]$ υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{F(x) \ln F(x)}{x - 1}$$

Είναι

$$\xi > 1 \Leftrightarrow F(\xi) > F(1) = 1 \Leftrightarrow \ln F(\xi) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln F(\xi) + 1 > 1 \overset{f(\xi) > 0}{\Leftrightarrow} f(\xi) \left(\ln F(\xi) + 1\right) > f(\xi) \Leftrightarrow h'(\xi) > f(x) \Leftrightarrow$$
$$\frac{F(x) \ln F(x)}{x - 1} > f(x) \overset{x - 1 > 0}{\Rightarrow} F(x) \ln F(x) > (x - 1) f(x)$$

Τελικά, $F(x) \ln F(x) \geq (x - 1) f(x)$ για κάθε $x \geq 1$

<u>β' τρόπος</u>

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x \geq 1$ ισχύει $F(x) \geq F(1) = 1 > 0$

Για κάθε $x \geq 1$ θέλουμε να δείξουμε

$$\ln F(x)^{F(x)} \geq (x - 1) f(x) \Leftrightarrow F(x) \ln F(x) \geq (x - 1) f(x)$$

- Για $x = 1$ η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα αφού $1 \cdot \ln 1 \geq 0 \cdot f(1) \Rightarrow 0 \geq 0$
- Για $x > 1$ έχουμε

$$F(x) \ln F(x) > (x - 1) f(x) \overset{(x-1)F(x) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln F(x)}{x - 1} > \frac{f(x)}{F(x)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln F(x) - \ln F(1)}{x - 1} > \frac{f(x)}{F(x)} \Leftrightarrow \frac{\ln F(x) - \ln F(1)}{x - 1} > (\ln F(x))'$$

Θέτω $h(x) = \ln F(x)\ ,\ x \in [1, +\infty)$

Για $x \geq 1$ η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = \frac{f(x)}{F(x)} \text{ και } h''(x) = \frac{\overbrace{f'(x)}^{-}\,\overbrace{F(x)}^{+} - \overbrace{f^2(x)}^{+}}{\underbrace{F^2(x)}_{+}}$$

Επειδή $h''(x) < 0$ η h είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$. Από ΘΜΤ για την h στο διάστημα $[1, x]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \Rightarrow \frac{f(\xi)}{F(\xi)} = \frac{\ln F(x)}{x - 1}$$

Άρα

$$\xi < x \overset{h' \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow} h'(\xi) > h'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln F(x)}{x - 1} > (\ln F(x))'$$

που είναι και το ζητούμενο