Άσκηση 93

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{ημ}x}{x} & , \ x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\text{ημ}x dx & , \ x = 0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[-\pi, \pi]$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) α΄) Να λυθεί η εξίσωση $\pi\text{ημ}x = 2x \quad (1) \quad , \ x \in [-\pi, \pi]$.

β΄) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{-\pi}^{\rho_1} xf(x)dx = \int_{\pi}^{\rho_2} xf(x)dx$, όπου $\rho_1 < 0 < \rho_2$ οι ρίζες της εξίσωσης (1).

Επιπλέον, δίνεται F αρχική της f με $F(0) = 0$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{F(x-\pi) - F\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} - \frac{F(e^{x-1} - x + \pi) - F\left(\text{ημ}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}{x-1} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

v) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\rho_2} F(\text{ημ}x)dx < 1$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = \Big[-x\sigma\upsilon\nu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = 0 + \Big[\eta\mu x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα συνεχής στο $[-\pi, \pi]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ με $f'(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2x} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$ με $f'(0) = 0$

Επίσης, ισχύει

$$f(-\pi) = \frac{\eta\mu(-\pi)}{-\pi} = 0 \quad \text{και} \quad f(\pi) = \frac{\eta\mu\pi}{\pi} = 0 \Rightarrow f(-\pi) = f(\pi)$$

άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle

ii) Για $x \in [-\pi, \pi] - \{0\}$, το πρόσημο της $f'(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$ εξαρτάται από τον αριθμητή

Θέτω $g(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Έχουμε $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x$

- Για $x \in [-\pi, 0)$: $x < 0$ και $\eta\mu x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Για $x \in (0, \pi]$: $x > 0$ και $\eta\mu x > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$

Για $x < 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Για $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

x	$-\pi$		0		π
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f([-\pi, \pi]) = [0, 1]$.

iii) α′) Για $x = 0$ η (1) γίνεται $\pi \cdot ημ0 = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ το οποίο ισχύει. Άρα, το $x_0 = 0$ είναι λύση της εξίσωσης στο $[-\pi, \pi]$.

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$\pi ημx = 2x \Leftrightarrow \frac{ημx}{x} = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}$$

- Στο διάστημα $\Delta_1 = [-\pi, 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

  άρα $\rho_1 = -\frac{\pi}{2}$

- Στο διάστημα $\Delta_2 = [0, \pi]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

  άρα $\rho_2 = \frac{\pi}{2}$

β′) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx$

Είναι

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} ημxdx \overset{u=-x}{=} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} ημ(-u)(-du) = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} ημudu \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} xf(x)du$$

iv) Είναι

$$\frac{F(x-\pi) - F\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} - \frac{F(e^{x-1} - x + \pi) - F\left(ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}{x-1} = 0$$

$$(x-1)\left[F(x-\pi) - F\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - x\left[F(e^{x-1} - x + \pi) - F\left(ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\right] = 0$$

Θέτω

$$H(x) = (x-1)\left[F(x-\pi) - F\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - x\left[F(e^{x-1} - x + \pi) - F\left(ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\right]$$

Η H είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- $H(0) = F\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F(-\pi)$
- $H(1) = F(1) - F(\pi)$

Επειδή $F'(x) = f(x) \geq 0$ στο $[-\pi, \pi]$ (το = για $x = -\pi$ και $x = \pi$) και F συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[-\pi, \pi]$ η F είναι γνησίως αύξουσα, άρα

- $-\dfrac{\pi}{2} > -\pi \Rightarrow F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) > F(-\pi) \Rightarrow H(0) > 0$
- $1 < \pi \Rightarrow F(1) < F(\pi) \Rightarrow H(1) < 0$

Επειδή $H(0)\cdot H(1) < 0$ από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $H(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

v) Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\pi,\pi]-\{0\}$ με $F''(x) = f'(x)$

x	$-\pi$		0		π
F''		$+$	0	$-$	
F		$\smile$		$\frown$	

ΣΚ
$(0,0)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 0$ είναι

$$y - F(0) = F'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = f(0)\cdot x \Rightarrow y = x$$

Επειδή η F είναι κοίλη στο $[0,\pi]$ η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη εκτός του σημείου επαφής. Επομένως, για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει $F(x) \le x$ και το = μόνο για $x = 0$

Για κάθε $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \subset [0,\pi]$ ισχύει ημ$x \in [0,1] \subset [0,\pi]$, οπότε για $x =$ ημx, προκύπτει $F($ημ$x) \le$ ημx και το = μόνο όταν ημ$x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\text{ημ}x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}x dx = \Big[-\text{συν}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$$