

Άσκηση 94

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = -(e^x + xe^x)f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = -1$, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\kappa > 0$ ώστε η εξίσωση $\frac{1}{xe^x + 1} = \kappa(\ln \kappa - 1) + \frac{2e - 1}{e - 1}$ να έχει λύση.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\kappa F(x)dx < \frac{1}{2} + F(0)$, όπου F αρχική της f .

Έστω $\Phi(x) = (F(\eta\mu\alpha) - F(1))x - (F(e^\beta - \beta) - F(1))(x - 1)$, $x \in [0, 1]$, όπου $\alpha \in (0, 1)$ και $\beta \neq 0$

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\Phi(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

v) Να αποδείξετε ότι $2 \int_0^\rho \Phi(x)dx = \rho \cdot \Phi(0)$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης $\Phi(x) = 0$.

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = -(e^x + xe^x)f^2(x) \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x + xe^x \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (xe^x)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = xe^x + c$$

Για $x = 0$ από τη σχέση $f'(x) = -(e^x + xe^x)f^2(x)$ προκύπτει

$$f^2(0) = 1 \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} f(0) = 1$$

οπότε

$$\frac{1}{f(0)} = 0 \cdot e^0 + c \Rightarrow c = 1$$

άρα

$$\frac{1}{f(x)} = xe^x + 1 \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{xe^x + 1}$$

ii)

$$\frac{1}{xe^x + 1} = \kappa(\ln \kappa - 1) + \frac{2e - 1}{e - 1} \Rightarrow f(x) = \kappa(\ln \kappa - 1) + \frac{2e - 1}{e - 1}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = -\frac{e^x(x+1)}{(xe^x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	1		0

OM
 $\frac{e}{e-1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x + 1} = 0$$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = \frac{e}{e-1}$. Το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(0, \frac{e}{e-1}\right]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\kappa) = \kappa(\ln \kappa - 1) + \frac{2e-1}{e-1}$, $\kappa > 0$

$$h'(\kappa) = \ln \kappa + 1 - 1 = \ln \kappa$$

κ	0	1	$+\infty$	
h'		-	0	+
h				
		OE $\frac{e}{e-1}$		

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\kappa = 1$ το $h(1) = -1 + \frac{2e-1}{e-1} = \frac{e}{e-1}$, άρα

$$h(\kappa) \geq \frac{e}{e-1} \text{ και το } = \text{μόνο για } \kappa = 1$$

Για να έχει λύση η εξίσωση $f(x) = \kappa(\ln \kappa - 1) + \frac{2e-1}{e-1}$ πρέπει

$$\kappa(\ln \kappa - 1) + \frac{2e-1}{e-1} \in f(A) \Leftrightarrow h(\kappa) \leq \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow h(\kappa) = \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

iii) α' τρόπος

Για $\kappa = 1$ η ανισότητα γίνεται

$$\int_0^1 F(x) dx < \frac{1}{2} + F(0) \Leftrightarrow \int_0^1 F(x) dx - F(0) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 (F(x) - F(0)) dx < \frac{1}{2}$$

Από ΘΜΤ για την F στο $[0, x]$ με $x \in (0, 1]$, υπάρχει $\xi \in (0, x) \subset (0, 1)$ ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Rightarrow F(x) - F(0) = x \cdot F'(\xi) \Rightarrow F(x) - F(0) = x \cdot f(\xi)$$

Είναι $\xi > 0 \Rightarrow \xi e^\xi > 0 \Leftrightarrow 1 + \xi e^\xi > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\xi e^\xi + 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < f(\xi) < 1$

Επειδή $f(\xi) < 1$ προκύπτει

$$F(x) - F(0) < x \cdot 1 \Rightarrow F(x) - F(0) < x$$

άρα

$$\int_0^1 (F(x) - F(0)) dx < \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Συνεπώς } \int_0^1 F(x) dx < \frac{1}{2} + F(0)$$

β' τρόπος

Η συνάρτηση F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$F'(x) = f(x) \quad \text{και} \quad F''(x) = f'(x)$$

Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι $F''(x) < 0$ άρα η F είναι κοίλη στο $[-1, +\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_F στο σημείο $x_0 = 0$ είναι

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0) \Rightarrow y - F(0) = f(0) \cdot x \Rightarrow y = x + F(0)$$

Επειδή η F είναι κοίλη στο $[-1, +\infty)$ ισχύει $F(x) \leq x + F(0)$ για κάθε $x \geq -1$ και το = για $x = 0$, επομένως

$$\int_0^1 F(x) dx < \int_0^1 x + F(0) dx = \left[\frac{x^2}{2} + F(0)x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + F(0)$$

iv) Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική

$$\Phi(0) = F(e^\beta - \beta) - F(1) \quad \text{και} \quad \Phi(1) = F(\eta\mu\alpha) - F(1)$$

- Για $\alpha \in (0, 1) \Rightarrow \eta\mu\alpha < \alpha < 1$

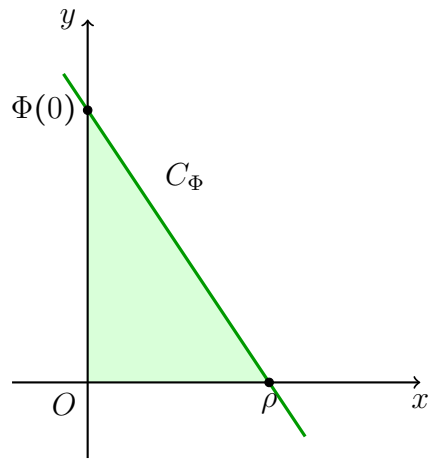
Επειδή $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η F είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα $F(\eta\mu\alpha) < F(1) \Rightarrow \Phi(1) < 0$

- Είναι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = για $x = 0$, άρα για $\beta \neq 0$ ισχύει $e^\beta > \beta + 1 \Leftrightarrow e^\beta - \beta > 1$

Επειδή η F είναι γνησίως αύξουσα $F(e^\beta - \beta) > F(1) \Rightarrow \Phi(0) > 0$

άρα $\Phi(0)\Phi(1) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano η $\Phi(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον μία ρίζα $\rho \in (0, 1)$ και επειδή η Φ είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού η ρίζα ρ είναι μοναδική.

v) Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού, επομένως η γραφική της παράσταση παριστάνει ευθεία γραμμή που τέμνει τον άξονα x' στο $\rho \in (0, 1)$ και τον άξονα $y'y$ στο $\Phi(0) > 0$



Αφού $\Phi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \rho]$ έχουμε ότι

$$\int_0^\rho \Phi(x) dx = E_{\tau_{\rho\gamma}} = \frac{\rho \cdot \Phi(0)}{2} \Rightarrow 2 \int_0^\rho \Phi(x) dx = \rho \cdot \Phi(0)$$