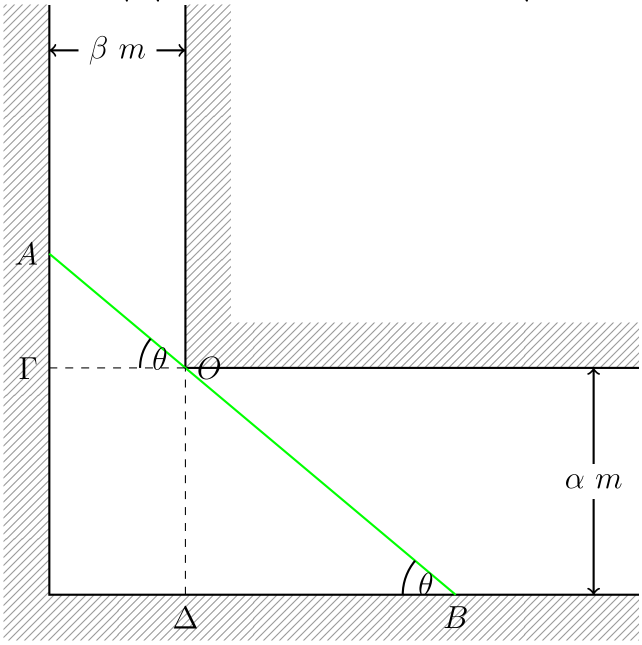
Άσκηση 95

Δύο διάδρομοι πλάτους $\alpha\ m$ και $\beta\ m$ τέμνονται κάθετα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



i) Αν ισχύει $0 < \beta < \alpha$, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (O\Delta + \Delta B) = 8$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu(\beta x)}{x} = 1$ να δείξετε ότι $\alpha = 8$ και $\beta = 1$.

Θέλουμε να μεταφέρουμε μια σκάλα από τους διαδρόμους, η οποία να μπορεί να περάσει (στρίψει) την ορθή γωνία O που δημιουργούν οι διάδρομοι.

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση (AB) δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(\theta) = \frac{8}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\ ,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

iii) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο και μετά να βρείτε το μέγιστο μήκος της σκάλας που μπορεί να στρίψει στη γωνία O.

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $h(\theta) = \eta\mu\theta \cdot f(\theta)\ ,\ \theta \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ και τον άξονα $x'x$.

Μαθηματική Λέσχη Ν. Ορεστιάδας

Ουντζούδης Δ.

Λύση

i) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\Delta B$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{O\Delta}{\Delta B} = \frac{\alpha}{\Delta B} \Rightarrow \Delta B = \frac{\alpha}{\varepsilon\varphi\theta} = \alpha\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

οπότε

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(O\Delta + \Delta B) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\alpha + \alpha\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right) = \alpha + \alpha\cdot\frac{0}{1} = \alpha \Rightarrow \alpha = 8$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\beta x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\beta\cdot\frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x}\right) = \beta\cdot 1 = \beta \Rightarrow \beta = 1$$

ii) Το συνολικό μήκος της σκάλας είναι $(AB) = (AO) + (OB)$

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma O$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\Gamma O}{AO} = \frac{1}{AO} \Rightarrow AO = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Delta B$ έχουμε

$$\eta\mu\theta = \frac{O\Delta}{OB} = \frac{8}{OB} \Rightarrow OB = \frac{8}{\eta\mu\theta}$$

άρα

$$f(\theta) = (OB) + (AO) = \frac{8}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\ ,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(\theta) = -\frac{8\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{\eta\mu^3\theta - 8\sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$f'(\theta) = 0 \Rightarrow \eta\mu^3\theta = 8\sigma\upsilon\nu^3\theta \Rightarrow \varepsilon\varphi^3\theta = 8 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 2$$

Επειδή η $\varepsilon\varphi\theta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $2 \in f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $\theta_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\varepsilon\varphi\theta_0 = 2$

Για $0 < \theta < \theta_0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta < 2 \Rightarrow f'(\theta) < 0$

Για $\frac{\pi}{2} > \theta > \theta_0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta > 2 \Rightarrow f'(\theta) > 0.$

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ΟΕ

$f(\theta_0)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\theta = \theta_0$. Το μέγιστο μήκος σκάλας που μπορεί να στρίψει ισούται με το $f(\theta_0)$

Είναι $\varepsilon\varphi\theta_0 = 2$ οπότε

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta_0 = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta_0} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\eta\mu^2\theta_0 = \frac{\varepsilon\varphi^2\theta_0}{1+\varepsilon\varphi^2\theta_0} = \frac{4}{5} \Rightarrow \eta\mu\theta_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Άρα

$$f(\theta_0) = \frac{8}{\frac{2}{\sqrt{5}}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5}\ m$$

iv) Είναι

$$h(\theta) = \eta\mu\theta \cdot \left(\frac{8}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right) = 8 + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 8 + \varepsilon\varphi\theta$$

Επειδή $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ είναι $h(\theta) > 0$, άρα

$$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} h(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (8 + \varepsilon\varphi\theta)\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 8\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\, d\theta =$$

$$8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \Big[\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \left(\ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$\frac{4\pi}{3} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4\pi}{3} + \ln\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$$