Άσκηση 96

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x-1)\ln x\ ,\ x \in (0,+\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι $g(x) + (x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $(\text{ημ}x - 1)\ln(\text{ημ}x) = -e^{2x-\pi} + 2e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1\ ,\ x \in (0,\pi)$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,x)$ ώστε $\ln\dfrac{\xi}{e} + 1 - \dfrac{1}{\xi} + x > 0$.

iv) Να αποδείξετε ότι $g'(x^4) - g'(x^2) \leq g'(x) - g'(x^3)$ για κάθε $x \in (0,1]$.

v) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 g\left(e^{e^x}\right)dx > \frac{e^2-1}{2}$.

Λύση

i) Για $x = 1$ ισχύει ως ισότητα αφού $g(1) + (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0$

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x - 1 < 0$ και $\ln x < 0$ άρα

$$(x-1)\ln x > 0 \Rightarrow (x-1)\ln x + (x-1)^2 > 0$$

Για $x \in (1,+\infty)$ είναι $x - 1 > 0$ και $\ln x > 0$ άρα

$$(x-1)\ln x > 0 \Rightarrow (x-1)\ln x + (x-1)^2 > 0$$

επομένως $g(x) + (x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και το = μόνο για $x = 1$

ii) Έχουμε

$$(\eta\mu x - 1)\ln(\eta\mu x) = -e^{2x-\pi} + 2e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu x - 1)\ln(\eta\mu x) + e^{2x-\pi} - 2e^{x-\frac{\pi}{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu x - 1)\ln(\eta\mu x) + \left(e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$g(\eta\mu x) + \left(e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1\right)^2 = 0$$

Είναι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το = για $x = 1$. Για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι $\eta\mu x > 0$ άρα ισχύει $g(\eta\mu x) \geq 0$ και το = για $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

και $\left(e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1\right)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ και το = όταν $e^{x-\frac{\pi}{2}} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

οπότε

$$g(\eta\mu x) + \left(e^{x-\frac{\pi}{2}} - 1\right)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,\pi) \text{ και το = για } x = \frac{\pi}{2}$$

iii) Έχουμε $g(x) = (x-1)\ln x \Rightarrow g'(x) = \ln x + (x-1)\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x}$

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1,x)$ ώστε

$$\ln\frac{\xi}{e} + 1 - \frac{1}{\xi} + x > 0$$

$$\ln\xi - 1 + 1 - \frac{1}{\xi} + x > 0 \Leftrightarrow \ln\xi + 1 - \frac{1}{\xi} + x - 1 > 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + x - 1 > 0$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ με $x > 1$
Από το ΘΜΤ για τη g στο $[1,x]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \frac{(x-1)\ln x - 0}{x-1} = \ln x$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\ln x + x - 1 > 0$ για κάθε $x > 1$, το οποίο ισχύει αφού

$$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \text{ και } x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$$

iv) Είναι $g''(x) = (\ln x + 1 - \dfrac{1}{x})' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για $x = 1$ η $g'(x^4) - g'(x^2) \le g'(x) - g'(x^3)$ ισχύει ως ισότητα αφού

$$g'(1) - g'(1) \le g'(1) - g'(1) \Leftrightarrow 0 \le 0$$

Για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $x^4 < x^2 < x^3 < x$ άρα

$$x^4 < x^2 \Leftrightarrow g'(x^4) < g'(x^2)$$

και

$$x^3 < x \Leftrightarrow g'(x^3) < g'(x)$$

άρα

$$g'(x^4) + g'(x^3) < g'(x) + g'(x^2) \Leftrightarrow$$

$$g'(x^4) - g'(x^2) < g'(x) - g'(x^3)$$

και τελικά για κάθε $x \in (0, 1]$ ισχύει

$$g'(x^4) - g'(x^2) \le g'(x) - g'(x^3)$$

v) Είναι

$$g(x) = (x-1)\ln x \ , \ x > 0 \overset{x \to e^{e^x} > 0}{\Rightarrow} g\left(e^{e^x}\right) = \left(e^{e^x} - 1\right)\ln\left(e^{e^x}\right) = \left(e^{e^x} - 1\right)e^x$$

Ισχύει $e^x \ge x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ για $x = 0$, άρα $e^{e^x} > e^x + 1$ (αφού $e^x \ne 0$) Οπότε

$$e^{e^x} - 1 > e^x \Leftrightarrow e^x(e^{e^x} - 1) > e^{2x} \Leftrightarrow g\left(e^{e^x}\right) > e^{2x}$$

άρα

$$\int_0^1 g\left(e^{e^x}\right)dx > \int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$$