

Άσκηση 97

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\int_t^{t+1} (2g(x))^2 dx + 8 \int_{t+1}^t e^x g(x) dx \leq 2e^{2t}(1 - e^2).$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση g .

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x) = g^2(x) - 2xg(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - 2x \ln x + 1$, $x > 0$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 |f(x) - 2| dx$, $\lambda \in (0, 1)$ και στη συνέχεια να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$.

v) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_φ , C_h και την ευθεία

$$y = 2, \text{ όπου } \varphi(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx & , x = 0 \end{cases} \text{ και } h(x) = g(-x), x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} (2g(x))^2 dx + 8 \int_{t+1}^t e^x g(x) dx &\leq 2e^{2t}(1 - e^2) \\ \int_t^{t+1} 4g^2(x) dx - 8 \int_t^{t+1} e^x g(x) dx + 2e^{2t+2} - 2e^{2t} &\leq 0 \\ \int_t^{t+1} (4g^2(x) - 8e^x g(x)) dx + [2e^{2x}]_t^{t+1} &\leq 0 \\ \int_t^{t+1} (4g^2(x) - 8e^x g(x)) dx + \int_t^{t+1} 4e^{2x} dx &\leq 0 \\ \int_t^{t+1} (4g^2(x) - 8e^x g(x) + 4e^{2x}) dx &\leq 0 \\ \int_t^{t+1} (2g(x) - 2e^x)^2 dx &\leq 0 \end{aligned}$$

Όμως $(2g(x) - 2e^x)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [t, t+1]$ άρα $\int_t^{t+1} (2g(x) - 2e^x)^2 dx \geq 0$

Οπότε

$$\int_t^{t+1} (2g(x) - 2e^x)^2 dx = 0$$

και επειδή $t \neq t+1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $2g(x) - 2e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = e^x$ για κάθε $x \in [t, t+1]$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$ προκύπτει τελικά ότι $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Είναι $f(e^x) = g^2(x) - 2xg(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f(e^x) = (e^x)^2 - 2xe^x + 1$$

Θέτω $u = e^x > 0 \Rightarrow x = \ln u$ άρα

$$f(u) = u^2 - 2u \ln u + 1, \quad u > 0$$

Συνεπώς

$$f(x) = x^2 - 2x \ln x + 1, \quad x > 0$$

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$f'(x) = 2x - 2 \ln x - 2x \cdot \frac{1}{x} = 2(x - \ln x - 1)$$

Είναι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και το = μόνο για $x = 1$, άρα $x - 1 - \ln x \geq 0$.

Συνεπώς, $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το = μόνο για $x = 1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
f'		+	+
f		1	$+\infty$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{2(x-1)}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
f''		-	+
f		↘	↗

ΣΚ
(1,2)

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x \ln x + 1) = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty$$

iv) Για $x \leq 1$ $\stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 0$, οπότε

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 |f(x) - 2| dx = \int_{\lambda}^1 f(x) - 2 dx$$

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (2 - x^2 + 2x \ln x - 1) dx = \int_{\lambda}^1 (1 - x^2 + 2x \ln x) dx$$

$$\int_{\lambda}^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{\lambda}^1 = \frac{2}{3} - \lambda + \frac{\lambda^3}{3}$$

$$\int_{\lambda}^1 2x \ln x dx = \int_{\lambda}^1 (x^2)' \ln x dx = [x^2 \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 x dx = -\lambda^2 \ln \lambda - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2}$$

Συνεπώς

$$I(\lambda) = \frac{1}{6} - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \lambda^2 \ln \lambda$$

Είναι

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^2 \ln \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\lambda^2}{2} \right) = 0$$

οπότε

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \frac{1}{6} - 0 + 0 + 0 - 0 = \frac{1}{6}$$

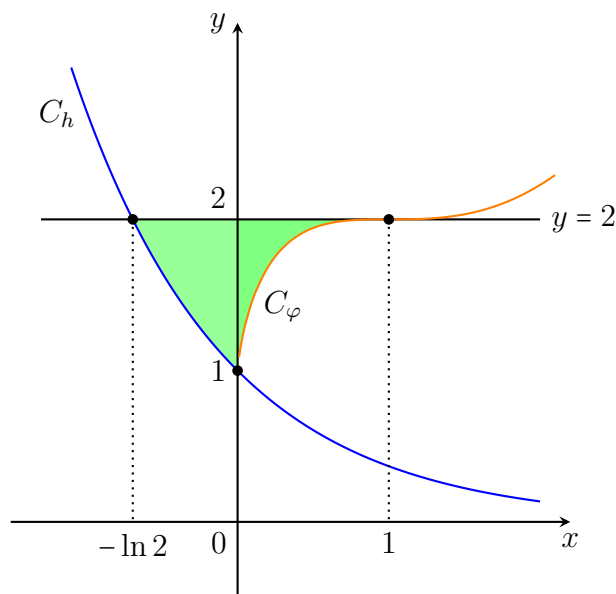
v) Έχουμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, οπότε

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \text{ και } h(x) = g(-x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

Για $x > 0$ η φ είναι συνεχής αφού $\varphi(x) = f(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = \varphi(0) \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι συνεχής στο } 0$$

οπότε η φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$



Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των φ και h με την ευθεία $y = 2$

- $\varphi(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} x = 1$
- $h(x) = 2 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$

Το εμβαδόν του χωρίου ισούται με

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^0 (2 - h(x)) dx + \int_0^1 (2 - \varphi(x)) dx$$

$$\int_{-\ln 2}^0 (2 - e^{-x}) dx = [2x + e^{-x}]_{-\ln 2}^0 = 1 - (-2 \ln 2 + 2) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\int_0^1 (2 - \varphi(x)) dx \stackrel{\varphi \text{ συνεχ/ης}}{\stackrel{\text{στο } 0}{\equiv}} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{\lambda}^1 (2 - f(x)) dx \right) \stackrel{(iv)}{\equiv} \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \frac{1}{6}$$

Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{6} = 2 \ln 2 - \frac{5}{6}$$