Άσκηση 98

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2\ln x - 1$, $x > 0$ και $g(x) = 4x(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(-36x)}{g(x)} = \alpha - 6$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

ii) Αν η εφαπτομένη (ε) που διαπερνά τη C_f στο σημείο $M(x_1, f(x_1))$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $N(x_2, g(x_2))$, να βρεθούν τα σημεία M, N.

iii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h και την ευθεία (ε), όπου $h(x) = \begin{cases} f(x) - 2\ln x + 1 & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο χωρία των οποίων ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\dfrac{2}{1}$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{ef(e^{x-1}) - 3e^x + 3e}{eg(e^{x-1} - 2) - 4e^x + 12e} + \eta\mu \dfrac{1}{x-1} \right)$.

Λύση

i) Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\etaμ(-36x)}{g(x)} = \alpha-6 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\etaμ(-36x)}{4x(x+\alpha)} = \alpha-6 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{-36}{4(x+\alpha)}\cdot\frac{\etaμ(-36x)}{-36x}\right] = \alpha-6 \Rightarrow -\frac{36}{4\alpha}\cdot 1 = \alpha-6 \Rightarrow -\frac{9}{\alpha} = \alpha-6$$

$$-9 = \alpha^2-6\alpha \Rightarrow \alpha^2-6\alpha+9 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = x^2+2\ln x-1$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = 2x+\frac{2}{x} \text{ και } f''(x) = 2-\frac{2}{x^2} = \frac{2x^2-2}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

ΣΚ
$M(1,0)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) που διαπερνά την C_f είναι η

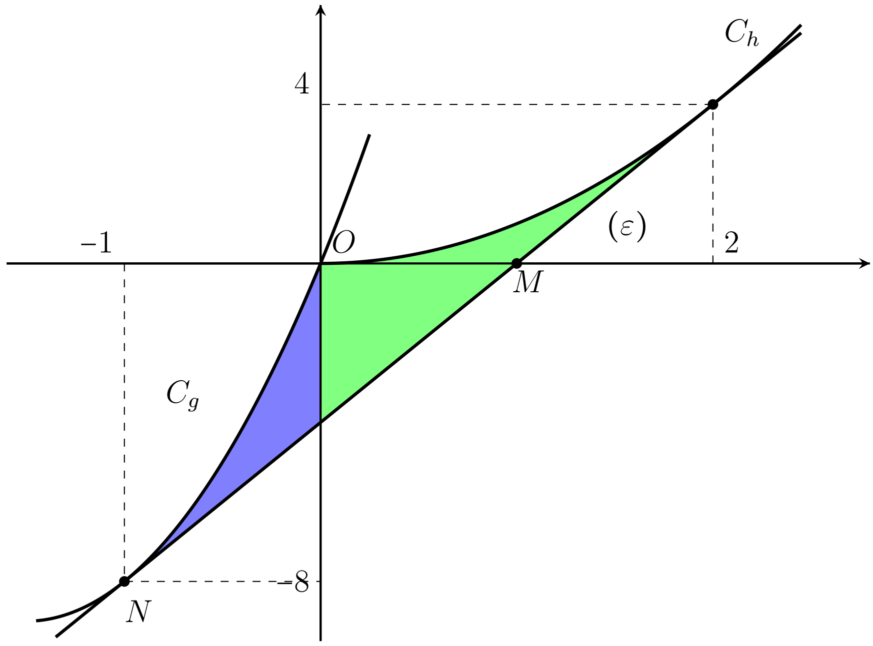
$$(\varepsilon): y-f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = 4x-4$$

Για αν εφάπτεται η ευθεία (ε) και της C_g στο σημείο $N(x_2, g(x_2))$ πρέπει

$$g'(x_2) = 4 \Rightarrow 8x_2+12 = 4 \Rightarrow 8x_2 = -8 \Rightarrow x_2 = -1$$

και $g(x_2) = 4x_2-4 \Rightarrow -8 = 4(-1)-4 \Rightarrow -8 = -8$ ισχύει. Άρα το σημείο επαφής είναι το $N(-1,-8)$

iii) Για $x>0$ έχουμε $h(x) = f(x)-2\ln x+1 = x^2$. Επειδή $h(0) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με τύπο $h(x) = x^2$



$$E(\Omega_1) = \int_{-1}^{0} |g(x) - 4x + 4|\, dx = \int_{-1}^{0} 4(x+1)^2\, dx = \left[\frac{4}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

$$E(\Omega_2) = \int_{0}^{2} |h(x) - 4x + 4|\, dx = \int_{0}^{2} (x-2)^2\, dx = \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3}$$

άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\dfrac{E(\Omega_2)}{E(\Omega_1)} = \dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{2}{1}$

iv) Είναι

$$L = \lim_{x \to 1^+} \left(\underbrace{\frac{e \cdot f(e^{x-1}) - 3e^x + 3e}{e \cdot g(e^{x-1} - 2) - 4e^x + 12e}}_{A(x)} + \eta\mu \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x \to 1^+} A(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(e^{x-1}) - 3e^{x-1} + 3}{g(e^{x-1} - 2) - 4e^{x-1} + 12} \overset{u = e^{x-1}}{=} \lim_{u \to 1^+} \frac{f(u) - 3u + 3}{g(u-2) - 4u + 12} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{u \to 1^+} \frac{f'(u) - 3}{g'(u-2) - 4} = \lim_{u \to 1^+} (f'(u) - 3) \frac{1}{8(u-1)} = (4-3)(+\infty) = +\infty$$

και

$$-1 \le \eta\mu \frac{1}{x-1} \le 1 \Rightarrow A(x) - 1 \le A(x) + \eta\mu \frac{1}{x-1} \le A(x) + 1$$

$$\lim_{u \to 1^+} A(x) - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{u \to 1^+} \left(A(x) + \eta\mu \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$