Άσκηση 99

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $(\ln|f(x)|)^3 - 3\ln|f(x)| + 3x = 6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(\alpha)>0$ για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Αν $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.

Δίνεται $g(x)=f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{3}(\ln x)^3+\ln x+2\ ,\ x>0$

iii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=\dfrac{8}{3}$.

v) Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x)=(x-e)g\left(\dfrac{x}{e}\right)+(x-1)g(x)\ ,\ x\in[1,e]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ ώστε $\Phi'(\xi)=4$.

vi) Να αποδείξετε ότι $-3(e-e^{e^{-2}})<\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} xe^x g'(x)dx<e^e-e^{e^{-2}}$, όπου ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $g(x)=\dfrac{8}{3}$ με $\rho_1<\rho_2$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) > 0$ οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Είναι $f(x) > 0$ άρα $|f(x)| = f(x)$ οπότε η αρχική σχέση γίνεται:

$$(\ln|f(x)|)^3 - 3\ln|f(x)| + 3x = 6 \Leftrightarrow (\ln f(x))^3 - 3\ln f(x) = 6 - 3x \quad (1)$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε

$$\ln f(x_1) = \ln f(x_2) \Leftrightarrow (\ln f(x_1))^3 = (\ln f(x_2))^3$$

και

$$-3\ln f(x_1) = -3\ln f(x_2)$$

οπότε

$$(\ln f(x_1))^3 - 3\ln f(x_1) = (\ln f(x_2))^3 - 3\ln f(x_2)$$

$$6 - 3x_1 = 6 - 3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, $y > 0$ στη σχέση (1) οπότε

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}(\ln y)^3 + \ln y + 2\,, \ y > 0$$

Συνεπώς, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3}(\ln x)^3 + \ln x + 2$, $x > 0$.

iii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = -\frac{1}{3}\cdot 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-(\ln x)^2}{x}$$

Για το πρόσημο της g' έχουμε

- $g'(x) = 0 \iff 1-(\ln x)^2 = 0 \iff \ln x = 1$ ή $\ln x = -1 \iff x = e$ ή $x = \dfrac{1}{e}$
- $g'(x) > 0 \iff 1-(\ln x)^2 > 0 \iff (\ln x)^2 < 1 \iff -1 < \ln x < 1 \iff \dfrac{1}{e} < x < e$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$ το $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{3}$ και τοπικό μέγιστο για $x = e$ το $g(e) = \frac{8}{3}$

iv)

$$g(x) = \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}(\ln x)^3 + \ln x + 2 = \frac{8}{3}$$

Θέτω $u = \ln x$ και η εξίσωση γίνεται

$$-\frac{1}{3}u^3 + u + 2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow -u^3 + 3u + 6 = 8 \Leftrightarrow u^3 - 3u + 2 = 0$$

$$(u-1)(u^2 + u - 2) = 0 \Leftrightarrow (u-1)^2(u+2) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \text{ ή } u = -2$$

Συνεπώς

- $u = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
- $u = -2 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\rho_1 = \frac{1}{e^2}$ και $\rho_2 = e$.

v) Η Φ είναι συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Από ΘΜΤ για την Φ στο $[1, e]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$\Phi'(\xi) = \frac{\Phi(e) - \Phi(1)}{e-1} = \frac{(e-1)\frac{8}{3} - (1-e)\frac{4}{3}}{e-1} = \frac{(e-1)\frac{8}{3} + (e-1)\frac{4}{3}}{e-1}$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{(e-1)\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\right)}{e-1} = \frac{12}{3} = 4$$

vi) Είναι $xg'(x) = 1 - (\ln x)^2$ και

$$I = \int_{e^{-2}}^{e} xe^x g'(x)\,dx = \underbrace{\int_{e^{-2}}^{1} e^x \cdot xg'(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{e} e^x \cdot xg'(x)\,dx}_{I_2}$$

- Για $x \in [e^{-2}, 1]$ έχουμε

$$e^{-2} \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \ln x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^2 \leq 4$$

$$-4 \leq -(\ln x)^2 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq 1 - (\ln x)^2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq xg'(x) \leq 1$$

και το = για $x = e^{-2}$ και $x = 1$ αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζουμε με $e^x > 0$, άρα

$$-3e^x \leq e^x \cdot xg'(x) \leq e^x$$

με το = να ισχύει επίσης για $x = e^{-2}$ και $x = 1$ αντίστοιχα, οπότε

$$\int_{e^{-2}}^{1} -3e^x\,dx < \int_{e^{-2}}^{1} e^x \cdot xg'(x)\,dx < \int_{e^{-2}}^{1} e^x\,dx \Rightarrow -3\Big[e^x\Big]_{e^{-2}}^{1} < I_1 < \Big[e^x\Big]_{e^{-2}}^{1}$$

$$\Rightarrow -3(e - e^{e^{-2}}) < I_1 < e - e^{e^{-2}}$$

- Για $x \in [1, e]$ έχουμε

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^2 \leq 1$$

$$-1 \leq -(\ln x)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - (\ln x)^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq xg'(x) \leq 1$$

και το = για $x = 1$ και $x = e$ αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζουμε με $e^x > 0$, άρα

$$0 \leq e^x \cdot xg'(x) \leq e^x$$

με το = να ισχύει επίσης για $x = 1$ και $x = e$ αντίστοιχα, οπότε

$$0 < \int_{1}^{e} e^x \cdot xg'(x)\,dx < \int_{1}^{e} e^x\,dx \Rightarrow 0 < I_2 < \Big[e^x\Big]_{1}^{e} \Rightarrow 0 < I_2 < e^e - e$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες κατά μέλη έχουμε

$$-3(e - e^{e^{-2}}) < \int_{e^{-2}}^{e} xe^x g'(x)\,dx < e^e - e^{e^{-2}}$$