ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ
ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ *(Παράγραφος 1.8)*

---

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\alpha x+\eta\mu(\beta x)}{x}\ , & \text{αν } x<0\\[2ex] -1\ , & \text{αν } x=0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{9x^2+1}-3x-1}{\alpha x}\ , & \text{αν } x>0\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι **συνεχής** .

2. Να βρείτε τις τιμές των α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\,\sigma\upsilon\nu(x-1)+x-3}{x-1}\ , & \text{αν } x<1\\[2ex] \gamma\ , & \text{αν } x=1\\[2ex] \dfrac{\alpha x^3+\beta x^2-x+2}{x^2+2x-3}\ , & \text{αν } x>1\end{cases}$$

είναι **συνεχής** .

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f , $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, με

$$f(x)=\alpha x^3-\beta x\ ,\quad \alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$$

και g συνεχής και **περιττή** .

Να αποδείξετε ότι για κάθε $k>0$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[-k,k]$ τέτοιο, ώστε

$$(f\circ g)(x_0)=0\ .$$

4. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $\Delta\subseteq(0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$, υπάρχει x_0 τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\frac{\beta f(\alpha)+\alpha f(\beta)}{\alpha+\beta}\ .$$

5. Δίνεται η **συνεχής** και **γνησίως φθίνουσα** συνάρτηση $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$,

και η συνάρτηση

$$g(x)=2f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)\ ,\quad \text{για κάθε } x\in[0,1]\ .$$

Να αποδείξετε ότι η C_g έχει **ακριβώς ένα** κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

6. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=e^{x^2-1}\qquad \text{και}\qquad g(x)=ln(2-x)$$

έχουν **τουλάχιστον δύο** κοινά σημεία, των οποίων οι τετμημένες ανήκουν στο διάστημα $(-2,1)$.

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta<1$ η εξίσωση

$$\frac{\text{ημ}\,x-x}{x-\alpha}+\frac{ln\,x}{x-\beta}=0$$

έχει ρίζα στο διάστημα (α,β) .

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$ln\,x+e^x=\frac{1}{x-1}$$

έχει **ακριβώς μία** ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

9. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f\,,\,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, ώστε

$$(x+2)f(x)=x^2-3x-10\qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$(x-3)\,g(x)=\sqrt{x^2-2x+6}-x\qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g .

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινό σημείο στο διάστημα $(4,5)$.

10. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύει ότι

$$f^2(x)+2f(x)=x^2-16x+63\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\ .$$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\,,\,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$|f(x)-x|\le x^2 \quad , \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\ ,$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(0)\,x^2+5x-9}{3\,x^2-2x+12}=\frac{1}{3}$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι **συνεχής** στο $x_0=0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\text{ημ}\,x-\text{συν}\,x \quad , \text{ με } x\in\Delta=[-\pi,\pi]$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f στο διάστημα Δ.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x)$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ σε **ένα τουλάχιστον** σημείο, με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα Δ.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1\,,\,x_2\in(-\pi,\pi)$ τέτοια, ώστε

$$(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)=0\ .$$