

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$e^{-x} f^2(x) - 2f(x) - e^{-x} = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{-1} f(1) > 1.$$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 1} + e^x, x \in \mathbb{R}.$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $f(x_0) = 2022.$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{2x}, x > 1.$

vi) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f^{-1}(x) - \ln x) \cdot x] \qquad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} [(f^{-1}(x) - \ln(x-1)) \cdot \eta\mu \frac{1}{x-1}]$$