

α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + \kappa xy$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ με $f(1) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x+y) = \kappa f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}^*$ και $f(0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι, αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.