

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(e^x) = e^{x+1} + x - e \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Αν $f(x) = ex + \ln x - e, x \in (0, +\infty)$

β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β2. Να βρείτε το πρόσημο της f .

β3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = -e$.

β4. Να βρείτε τα x , ώστε $f(e^x - e) \leq e^2 - e + 1$.