

A. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 3x + 4, x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το πρόσημο της g .

iii) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της g .

B. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) + 4 = (x+1)^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

iii) Αν $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{g(x)} - 1 & , x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-g(x)} - 1 & , x < -1 \end{cases}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(\eta\mu x) = 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\ln x) + 1 > -\sqrt[3]{10}$.