

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $g(x)=\ln^2 x$, $t(x)=\frac{1}{x}$.

α. Να βρείτε τις συναρτήσεις: $f \circ g$ και $g \circ f$

β. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο έχουμε $f \circ g = t$

γ. Να αποδείξετε ότι $g(f(x))=x$ για κάθε $x \geq 0$

2. Να βρείτε την συνάρτηση g , αν :

i) $f(g(x))=\ln \sqrt{x-1}$, $x \geq e^2+1$ και $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$

ii) $g(f(x))=\ln \sqrt{x-1}$, $x > 1$ και $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$

3. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \left[\frac{1}{2}, 10\right] \rightarrow \mathbb{R}$

με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$, για την οποία ισχύει $f(x) \cdot f(f(x)) = 5$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 10\right]$.

i. Να προσδιοριστεί το $f(10)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Να δείξετε ότι $f(5) = 1$.