

Α. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν η f είναι 1-1, να αποδείξετε ότι η f^{-1} παραγωγίζεται στο $f(\Delta)$ με $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$, $y \in f(\Delta)$ με $y = f(x)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f αντιστρέφεται

β) η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $(f^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x + 3$. Να αποδείξετε ότι:

Γ₁) Η f αντιστρέφεται με $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Γ₂) Αν η f^{-1} είναι συνεχής, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Γ₃) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $M(0, f^{-1}(0))$.