

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $f(0) = \alpha$. Έστω ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f'(x) \leq \kappa$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι $f(x) \leq \alpha + \kappa x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
2. Αν $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} - \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
4. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f(-2) = f(2) < f(0)$ και ακόμη ότι το σημείο $x_0 = -1$ είναι το μοναδικό σημείο του $(-2, 2)$ στο οποίο μηδενίζεται η f' .
Να δειχτεί ότι είναι $f(0) < f(-1)$.
5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\alpha > 0$.
Επίσης, $f(x) \neq -g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = g(\beta)$ και $f(\beta) = g(\alpha)$.
 - i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -g'(\xi)$.
 - ii) Αν η συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με τύπο
$$h(x) = \frac{f(x) + g(x)}{x},$$
 να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε
$$h'(\xi) = \frac{-(f+g)(\xi)}{\xi^2}.$$
 - iii) Η εφαπτομένη στο σημείο $(\xi, h(\xi))$ της γραφικής παράστασης C της h δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

6. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, για την οποία ισχύει $f(x)+2x^2+2x \leq 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,1)$.
7. Δίνεται η συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f . Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα Δ , τότε $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$, ενώ, αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα Δ , τότε $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, \psi \in (1, +\infty)$ ισχύει :

$$x \ln x + \psi \ln \psi > (x + \psi) \ln \left(\frac{x + \psi}{2} \right), \text{ όπου } x \neq \psi.$$

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2,3)$ και $f(3)=f(2)+19$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi)=10\xi-6$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$.

Να δείξετε ότι:

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

ii) Ισχύει $\ln(x-1) \cdot \ln(x+1) < (\ln x)^2$ για κάθε $x > 1$.

iii) $\ln(e-1) \cdot \ln(e+1) < 1$ και $\ln(e^\pi-1) \cdot \ln(e^\pi+1) < \pi^2$.

10. Έστω οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

i) $f(0)=2g(1)$, ii) $f(2x)-2g(x+1)+x \geq e^x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

iii) $f''(x) > 0$ και $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)-g'(e^x)=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$ και η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $[0,1]$ με $g(x)=f(x)-(1-x)$. Να δείξετε ότι :
- α) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g(\xi)=0$.
- β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2)=1$.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-\lambda x+3$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ και να δείξετε ότι η ευθεία $y=-2x+3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς το $x \rightarrow -\infty$.
- ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.
13. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2+\alpha x-1}{x^2+2x-3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- i) Για ποιές τιμές του α η f παρουσιάζει δύο ή ένα ή κανένα ακρότατο;
- ii) Για $\alpha=2$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=x_0$, όπου x_0 σημείο στο οποίο η f έχει ακρότατο.
14. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=\alpha$, $f'(0)=\beta$. Επίσης, έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\alpha \sin x - \beta \cos x$. Να δείξετε ότι :
- i) Η συνάρτηση $h(x)=(g(x))^2+(g'(x))^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii) Ισχύει $f(x)=\alpha \sin x + \beta \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

15. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

i) $f(0)=1$, $f(1)=e$ και ii) f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = f(x_0) \cdot x$.

16. Έστω συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$ και $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\alpha) = \frac{1}{\beta\gamma}, \quad f(\beta) = \frac{1}{\alpha\gamma} \quad \text{και} \quad f(\gamma) = \frac{1}{\alpha\beta}.$$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (\alpha, \gamma)$ και ένα τουλάχιστον $\lambda \in (\gamma, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa) = \frac{f(\kappa)}{\kappa}$ και $f'(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$.

ii) Αν τα σημεία $A(\kappa, f(\kappa))$ και $B(\lambda, f(\lambda))$ ορίζουν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

17. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

α) $f'(0) = 2$ και

β) $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι : i) Είναι $f(0) = 0$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

iii) $f'(x) = f(x) + 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$. iv) Να βρείτε τον τύπο της f .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

18. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$, όπου το x διατρέχει το ανοικτό διάστημα

$(0, +\infty)$ και η παράμετρος α παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$.

Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x \in (0, +\infty)$ και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = E(x) - K(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

i) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

19. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x = 1$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

ii) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: α) η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) ισχύει $xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}$ για κάθε $x > 0$.

20. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - \ln x} & , x \in A \\ -1 & , x = 0 \end{cases}$

i) Να βρείτε το σύνολο A .

ii) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iii) Να δείξετε ότι ισχύει: $-1 \leq f(x) \leq \frac{1}{e-1}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

21. Αν $f'(\ln x) = x + 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $A(1,3)$, να βρείτε τον τύπο της f και το σύνολο τιμών της.

22. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ και αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, αν για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + \lambda x - 6}{P(x)} \quad \text{ισχύουν : i) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1,$$

ii) οι ευθείες $x=1$ και $x=-2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και

iii) το σημείο $x_0 = -1$ είναι θέση τοπικού ακρότατου της f .

23. Έστω συνάρτηση $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

i) f παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$ με f' συνεχή σε αυτό και

ii) f' γνησίως αύξουσα στο $[-2, 2]$.

Να δείξετε ότι : α) Ισχύει $f(x) \leq f(-2) + f'(x)(x+2)$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.

β) Είναι $\int_{-2}^2 f(x) dx \leq 2(f(-2) + f(2))$.

24. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(x) > f(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(\alpha+1) > 2f(\alpha)$.

25. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$ και $f(1) = f(2) = 0$.
Να δείξετε ότι είναι $f(0) < 0$ και $f(3) < 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

26. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$, με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$. (Γενικές εξετάσεις 1994)
27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x - 3}{\ln x - 1}$, $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.
- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
 - ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 1$ έχει ακριβώς μία λύση.
 - iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{e^2}^{e^3} \frac{f(x)}{x} dx$.
28. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$. Η γραφική παράσταση της f έχει τρία κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$. Να αποδείξετε ότι :
- i) Η εξίσωση $f(x) = xf'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον θετικές ρίζες.
 - ii) Αν x_1, x_2 είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $f(x) = xf'(x)$ και τα σημεία $O(0,0)$, $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ είναι συνευθειακά, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(x_0) = 0$.
29. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής και κοίλη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) . Αν x_0 είναι μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) , να αποδείξετε ότι $\frac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x_0} < 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

30. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) + f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η γραφική παράσταση C της f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ και η εφαπτομένη της C στο A έχει κλίση 1. Να αποδείξετε ότι :

i) $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Είναι $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha \ln x}{x} + \beta \sqrt{x} - 1$. Να βρείτε τις τιμές

των πραγματικών αριθμών α και β για τις οποίες η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 3$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2004$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $(0, +\infty)$.

32. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύουν : i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, ii) $f(1) = e$ και

iii) $\frac{2f'(x)}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της f .

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \alpha x^2 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

i) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε το ακρότατο της g να βρίσκεται στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

ii) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f , g στο οποίο αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

34. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , καθώς το $x \rightarrow +\infty$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.
35. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, $x > 0$.
- i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 - ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - iii) Για την τιμή αυτή του α να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , την εφαπτομένη και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 2$.
36. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.
- i) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης C της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - ii) Να δείξετε ότι ισχύει $\ln x^{x^2} \geq -\frac{1}{2e}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = t$ και $x = 1$, όπου t είναι το σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

37. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

i) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - x_0}$, $x_0 \notin [\alpha, \beta]$,

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$.

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $N(x_0, 0)$.

38. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

Στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση

$$(3^{x-1} + 4^{x-1}) \cdot 5^{1-2x} < (3^{1-2x} + 4^{1-2x}) \cdot 5^{x-1}.$$

39. Έστω η συνάρτηση $f: \left[\frac{1}{4}, 4\right] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη.

Αν για κάθε $x \in [1, 4]$ ισχύει $f\left(\frac{4}{x}\right) = 4f\left(\frac{1}{x}\right)$ και είναι $f\left(\frac{25}{100}\right) = 1$,

να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (1, 4)$, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 12$.

40. Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $\alpha > 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

ii) Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε το ξ είναι μοναδικό.

iii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

41. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $x^2 f'(\ln x) = -x \eta \mu x - 2 \sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = \sigma \upsilon \nu 1$. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \frac{\sigma \upsilon \nu e^{\pi}}{e^{2\pi}}$.
42. Να δείξετε ότι ισχύει: $(x+y)^v \leq 2^{v-1}(x^v + y^v)$ για κάθε $x, y > 0, v \in \mathbb{N}^*$.
43. i) Αν η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι και η συνάρτηση $f \circ f$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g \circ g$, όπου $g(x) = (x+1) \cdot e^{x^2}$.
44. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x) - 3x^3 + 4x^2) = 2$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς το $x \rightarrow +\infty$.
45. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
Να αποδείξετε ότι : i) Ισχύει $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$.
ii) Αν $x_1 < x_2$, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, ώστε $f''(x_0) = 0$.
46. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν είναι $f'(\alpha) < 0$ και $f'(\beta) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

47. i) Αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύουν $f'(x) = \frac{1}{x}g(x)$ και $g'(x) = -\frac{1}{x}f(x)$,
να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = (f(e^x) - \eta\mu x)^2 + (g(e^x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$
είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.
- ii) Αν επί πλέον ισχύουν : $f(e^\pi) = 0$ και $g(e^\pi) = -1$,
να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = \eta\mu(\ln x)$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu(\ln x)$, $x \in (1, +\infty)$.
48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- i) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα
της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$,
να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.
- ii) Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς
μια λύση στο διάστημα $(-1, 0)$. (Θέμα 1995)
49. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια, ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής
το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g
στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.
(Θέμα 1995)
50. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία
ισχύει: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
 είναι : α) συνεχής και β) γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

51. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\ln x + \frac{f(x)}{x}$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$ να βρείτε τον τύπο της f και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

i) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ,
ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης C της f στο σημείο της $M(3, 2)$.

ii) Για τα α, β που βρήκατε, να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x+1} \text{ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.}$$

53. Ένας βιοτέχνης υπολογίζει ότι μπορεί να πουλήσει 2.000 παιχνίδια το μήνα, αν καθορίσει 3 ευρώ την τιμή κάθε παιχνιδιού. Επιπλέον υπολογίζει ότι για να αυξήσει τις πωλήσεις του μηνιαίως σε κάθε 200 παιχνίδια πρέπει να μειώνει την τιμή κάθε παιχνιδιού κατά 10 λεπτά. Να βρείτε τον αριθμό των παιχνιδιών τα οποία θα πρέπει να πουλάει κάθε μήνα για να έχει μέγιστη είσπραξη.

54. Η ραδιενέργεια που εκλύεται από τη διάσπαση x mg ενός ραδιενεργού σώματος δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^{2\alpha} x^\alpha}{e^x}, \quad x \in (0, +\infty), \text{ όπου } \alpha > 0 \text{ σταθερά που εξαρτάται}$$

από το υλικό του σώματος. Να βρείτε :

i) Τη μέγιστη τιμή $M(\alpha)$ της f .

ii) Τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η $M(\alpha)$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

55. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f(x^2) + xf(x-1) + x^{20} + 2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν για τη συνάρτηση g ισχύει $g(x) = f(x) + e^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση C της g έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(1, g(1))$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της f στο σημείο $B(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : (\mu + 20)x + 2y - 3 = 0$.

56. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 2 - e^{\mu x}$ και $g(x) = e^{2\mu x}$, όπου $\mu > 0$.

Αν $A(x_0, y_0)$ κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_1 και C_2 των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, να βρείτε το μ , ώστε οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 στο A να είναι κάθετες.

57. i) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε η γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta + \gamma e^x$ να εφάπτεται του άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη της C στο σημείο $(1, f(1))$ να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$.

ii) Για τα α, β, γ που βρήκατε, να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \kappa \alpha^x + \lambda \beta^x + \mu \gamma^x$,

όπου $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ και $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

i) Αν ισχύει $f(x) \geq \kappa + \lambda + \mu$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι είναι $\alpha^\kappa \cdot \beta^\lambda \cdot \gamma^\mu = 1$.

ii) Αν επιπλέον $\kappa, \lambda, \mu \geq 0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημείο καμπής.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 2ax + 3a$ με ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Να δείξετε ότι : i) Το $a \notin [0, 2]$.

ii) Η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στη θέση x_1 και ένα τοπικό μέγιστο στη θέση x_2 .

iii) Ισχύει $(1+x_1)(1+x_2)=1$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-\kappa)^3(x-\lambda)^5$ με $\kappa < \lambda$.

Να αποδείξετε ότι : i) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x-\kappa} + \frac{5}{x-\lambda}$, $x \neq \kappa, \lambda$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

61. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x^3) \geq f^2(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

β) $f'(-1) = f'(0) = f'(1)$.

γ) η συνάρτηση f έχει τέσσερα τουλάχιστον πιθανά σημεία καμπής στο $(-1, 1)$.

62. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(1) = 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) + x_0 e^{x_0} = e^{x_0}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2e^x$, όπου $a > 0$.
- α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 - β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C της f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο και να προσδιορίσετε.
 - γ) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η εφαπτομένη της C στο σημείο καμπής είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.
64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$.
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σημείο $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C της f και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$ είναι εφαπτομένη της C στο σημείο καμπής.
65. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f(x))^2 - 2f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x + 4x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει κρίσιμα σημεία.
66. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + \mu - 2$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.
- α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
 - β) Να βρείτε τα όρια της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.
 - γ) Αν $-18 < \mu < 9$, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
67. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\ln x)^2 - x \ln x + x - 1$, $x > 0$.
- i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
 - ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C της f έχει μοναδικό σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (1, 2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

68. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

α) $f'(x) < f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

β) η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x=0$, το $f(0)=0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) < f(x)$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x > 0$.

ii) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρεθεί το είδος του τοπικού ακρότατου της f στο $x=0$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

ii) Να βρείτε τα όρια της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

iii) Αν $0 < \alpha < 1$, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $2x^3 + \alpha = 3x^2$.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$f'(x) > \frac{2x}{x^2 + e} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

71. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$x \cdot e^{-x} \cdot f'(x) = \alpha x + \alpha x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $\psi = 2x + 1$. Να δείξετε ότι:

i) $f(x) = 2xe^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

72. Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$x^2 \cdot f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = f'(1) = 2004.$$

73. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = (x-1)e^x + x^2 + 1.$$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις

$$\text{των συναρτήσεων } f(x) = xe^x + x^2 \text{ και } g(x) = e^x - 1$$

έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις

γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = -1, x = 1$.

74. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha \neq \beta$ τέτοιοι ώστε να είναι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0) \leq f'(x_0)$.

75. i) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα

$$A = [\alpha, \beta], \text{ έχει σύνολο τιμών } f(A) = [-2, 2] \text{ και ισχύει}$$

$$f(\alpha), f(\beta) \in (-2, 2), \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχουν } x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$$

$$\text{τέτοια, ώστε να ισχύει } f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

ii) Αν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο A τότε η εξίσωση

$$\kappa f'(x) + \lambda f(x) = 0 \text{ με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ έχει ρίζα στο } (\alpha, \beta).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

76. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ και $g(x) = x^3 + 3\alpha x^2 + \beta x$,

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ii) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε η g να έχει τοπικό μέγιστο

στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και η C_g να έχει σημείο

καμπής, που να ανήκει στην πλάγια ασύμπτωτη της C_f .

77. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[x_0 - 1, x_0 + 3]$, παραγωγίσιμη στο

$(x_0 - 1, x_0 + 3)$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x_0 - \frac{9}{2}$.

Αν $f(x_0 - 1) = -3$ και $f(x_0 + 3) = 7$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$\xi_1, \xi_2 \in (x_0 - 1, x_0 + 3)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{25}{4}$.

78. Έστω συνάρτηση f δ ο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ με $f(a) = f(b)$. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[a, b]$, τότε $f(x) \leq f(a)$ για κάθε $x \in [a, b]$, ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[a, b]$, τότε $f(x) \geq f(a)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

79. Έστω f μια συνάρτηση τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) = x(1 + f'(x))$, $x \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(1) = 1$ και $f(2) = 2$.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} - |z|x + |z - 1|$, $z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$,

με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ Να βρείτε : i) τον μιγαδικό αριθμό z .

ii) την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$.