

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x + \alpha x + \beta & , x > 0 \\ \int_0^1 x e^x dx & , x = 0 \end{cases}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + x & , x > 0 \\ \int_0^{\pi} \eta \mu x dx - 2 & , x = 0 \end{cases}$

είναι αρχική της f .

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \lambda$, με $\lambda > 0$ και στη συνέχεια, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \lambda}{E(\lambda)}$.

v) Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1, x=2$.