

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) \neq 0$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\int_{\frac{g(x)+x}{x}}^{g'(x)} f^2(t) dt = 0, x > 0$
- $g(1) = 0$

i) Να δείξετε ότι $g(x) = x \ln x, x > 0$.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1, x=\lambda$ με $\lambda > 1$.

iii) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 - 3\lambda + 2} \quad \beta. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda^2 + 1}}{E(\lambda) + \lambda - 1}$$

iv) Να λυθεί η εξίσωση $g(e^{\eta \mu x} + 1) = g(2 + \eta \mu x)$.