

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) - xf'(x) = \frac{x}{\ln x}$ για κάθε $x > 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(ex) - \eta\mu(\pi x)}{x - 1} = 1$, όπου 1 πραγματικός αριθμός.
- i. Να δείξετε ότι $f(x) = -x \ln(\ln x)$, $x > 1$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\ln x)^{-x} = a$ με $a > 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1, +\infty)$.
- iv. Να αποδείξετε ότι $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x^2} dx = 1 - 2\ln 2$.
- v. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x + e)(x + e) > xf(x + 2e) + ef(e)$.