

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I(x) = \int_1^x x \frac{1}{t} dt, x \neq 0$ .

ii) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln|x| & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$ .

α) Να δείξετε ότι  $\alpha=0$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Επίσης, δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ .

Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι παράγουσα της  $f$  στο  $[0, +\infty)$ .

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $x_0=1$  και στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον  $\psi'$ , τη γραφική παράσταση της  $f$  και την ( $\varepsilon$ ).