

A. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(x) = \int_0^x e^{-t} dt$.

B. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x) = e^2(1-x)(I(x) - 1)$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^2(\ln x - 1)}{x}, x > 0$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B3. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

B5. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\alpha(2\ln x - 1) = x^2(\ln \alpha - 1)$, όπου $\alpha > 0$.

B6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{e^2} dx$.