

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - x^2 = 1 - \sin^2 x - 2x \eta \mu x, x \in \mathbb{R}.$
- $f(\alpha) > 0, f(-\alpha) > 0$ με $\alpha > 0.$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση $f.$

$$\beta) \text{ Αν } f(x) = \begin{cases} x - \eta \mu x & , x \geq 0 \\ \eta \mu x - x & , x < 0 \end{cases}$$

β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f'.$

β3. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\lambda f(x) dx$ με $\lambda \geq 0$ και να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\alpha. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) \quad \beta. \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I(\lambda)}{\eta \mu^2 \lambda} \quad \gamma. \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I(\lambda)}{f'(\lambda)}, \text{ όπου } I(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} + \sin \lambda - 1, \lambda \geq 0$$