

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί.

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ ελάχιστη τιμή, την $f(-2) = -1$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 3$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\eta\mu x) \cdot (\sin f(x) - 1)] = 0$.

iv) Να δείξετε ότι:

α. $f^2(x) - 3f(x) - 4 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. $\int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 6xf(x^2) dx + 4$.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g και την ευθεία $x=1$, όπου

$$g(x) = \frac{3}{x^2 + 1}.$$