

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x = x\ln 2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=2$.

B5. Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - \frac{x^2}{v}$, με $x \in \mathbb{R}$ και v φυσικό

αριθμό μικρότερο του 4 και το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(v^2 x)}{2^v x} = 1$.

i) Να δείξετε ότι $v=2$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, v)$ στο οποίο η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της g είναι κάθετη στην ευθεία (δ) με εξίσωση $x+2y=0$.