

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), x \in A$.

i) Να δείξετε ότι $A = \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

iii) Αν $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

iv) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της h και στη συνέχεια, να γίνει η γραφική της παράσταση.

v) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $M(0, h(0))$ και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι, για το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$, ισχύει $E(\Omega) > \frac{1}{2}$.

vi) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 xh(x)dx$.