ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
16^{Ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αποδείξτε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 10

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση της f στο Δ;

Μονάδες 5

3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με* ***Σωστό(Σ)****, αν είναι σωστή, ή με* ***Λάθος(Λ)****, αν είναι λανθασμένη:*

1) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to x_0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f' είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

3) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β]. Αν $f(\alpha)f(\beta)>0$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).

4) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0\in\Delta$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

5) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο 0 με $f'(0)=1$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y)=\frac{f(x)}{e^y}+\frac{f(y)}{e^x}\ .$$

1. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = \frac{1}{e^{x_0}} - f(x_0)$.

Μονάδες 8

2. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

Μονάδες 4

3. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

4. Αν Ε είναι το εμβαδόν της C_f , του άξονα x΄x και των ευθειών x=2 και x=3, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3}{e^3} < E < \frac{2}{e^2}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x+2\right)-5}{x-1} = 6$$

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(3\right)=5$ και β) $f'\left(3\right)=6$

Μονάδες 6

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2 - f(x)}{ημ(x-3)}$.

Μονάδες 7

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x)-3x-7συνx$, $x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

Μονάδες 5

4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \le f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f^3(x)+f(x)=2x$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 3

β) Βρείτε τις ρίζες και τη μονοτονία της f.

Μονάδες 3

γ) Αποδείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και εξετάστε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

δ) Αποδείξτε ότι για κάθε x>0 ισχύει: $xf'(x)<f(x)<2x$.

Μονάδες 6

ε) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 3

στ) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=5.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Β & Δ επιμελήθηκε ο **Κωνσταντόπουλος Λεωνίδας**, Μαθηματικός-MSc του Γυμνασίου Βάρδας Ηλείας.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.