

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
18^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

β) Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "πάνω" από τη C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία

παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι "1-1" στο Δ .

ε) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β το $f(\beta)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 4\lambda x$.

1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{4}$.

Μονάδες 6

2. Αν $\lambda = \frac{1}{4}$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^x - x - 2) = 1$ έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Μονάδες 3

iii) Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-3} + \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, 3)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = e^x - \int_0^1 e^{1-x} f(x) dx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι η $g(x) = f(x) + x$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της g^{-1} .

Μονάδες 8

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης g^{-1} , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

Μονάδες 5

4. Αν για μια συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\int_{h(1)}^{h(2)} f(x) dx = 0, \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in (1, 2) \text{ έτσι ώστε}$$

$$h'(\xi) = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x > 0$.

Μονάδες 3

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

Μονάδες 5

3. Να αποδείξετε ότι $f(x) < \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}$, για κάθε $x > \sqrt{e} + 1$.

Μονάδες 5

4. Αν G μία παράγουσα της g στο $(0, +\infty)$, όπου $g(x) = \frac{xf(x) + x - 1}{x^2 + 1}$ με $x > 0$ τότε:

- i) Να αποδείξετε ότι $G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$, $x > 0$.

Μονάδες 4

- ii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e G(x) dx > \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{G(x)}{x^2} dx$.

Μονάδες 3

- iii) Να αποδείξετε ότι η $G'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και να βρείτε τη μονοτονία της G .

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.