

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\frac{f^2(x) + 4e^x f(x)}{1 - e^{2x}} = 3, x \neq 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0.$
 - Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- i. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 3} - 2e^x, x \in \mathbb{R}.$
- ii. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ , αν η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μια λύση.
- iii. Να υπολογίσετε τα όρια:
- α. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 4}{(x - 4)^2}$
- β. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3 - f(x)}{(x - 3)^2} + \eta\mu \frac{1}{x - 3} \right)$
- γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\eta\mu \alpha - \alpha) f(x))$ όπου α μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.
- δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - \sqrt{3}) \sin x)$