

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$.

Να δείξετε ότι:

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Ισχύει:

α. $\ln(x-1) \cdot \ln(x+1) < (\ln x)^2$ για κάθε $x > 1$.

β. $\ln(e-1) \cdot \ln(e+1) < 1$ και $\ln(e^\pi - 1) \cdot \ln(e^\pi + 1) < \pi^2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sqrt{f^2(x) + 1}$, $x > 1$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $g(2-f(x)) > g\left(\frac{2\ln(1+e)-1}{\ln(1+e)}\right)$, $x > 1$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(\frac{g(x)}{f(x)} - 2 \right) \sin \frac{1}{x-1} \right]$.

v) Να δείξετε ότι $E(\Omega) < e-2$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$, $x=e$.