

Θέμα 109ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο x_0 με $x_0 \in (1, +\infty)$ στο οποίο παρουσιάζει μέγιστο το $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x) dx < 1 - 2 \ln \frac{3}{2}$.

Μονάδες 5

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια αρχική F της συνάρτησης f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(1) = \frac{1}{2}$.

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} < F(x_0) < x_0 - \frac{1}{2}$ όπου x_0 η θέση μεγίστου της συνάρτησης f .

Μονάδες 7