

Άσκηση 17 – 22-23

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, $f(0) = 1$ και

$$f'(x) \cdot f^2(x) \cdot (x^3 + 2x + 1) + \frac{1}{3} f^3(x) \cdot (3x^2 + 2) = 0$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{-\frac{1}{3}}$, $x \geq 0$

γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f .

δ. Να δείξετε ότι $f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ε. Να δείξετε ότι $\int_1^{e^2} f(x) dx < 2$

στ. Αν $\int_1^2 f(x) dx > \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y = 1$, $x = 1$ και $x = \alpha$ να είναι ίσο με $\int_1^\alpha f(x) dx$.