

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x} = 3$

$$\text{και } f(0) = \int_0^1 2x^3 e^{x^2} dx$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε σημείο με τετμημένη $\xi \in (0,1)$.

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $\psi = 3x + 1$.

Δ3. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(3) - f(2) - 3)x^3 + x + 2023}{(f(2) - 8)x^2 + x + 2022} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(-2) - f(-3) - 3)x^3 + x + 2023}{(f(2) - 8)x^2 + x + 2022}$$

Δ4. Να δείξετε ότι ισχύει $f(2) < \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx < 1$.