

Άσκηση 18 – 22-23

Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) + (f'(x))^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = e^{f(x)}, x \in \mathbb{R}$.
- $g'(0) = e$ και $f(0) = 1$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή.

γ. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq \beta$ να δείξετε ότι:

$$2e^{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \leq e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)}$$

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \int_0^e x \cdot f(t) dt = \int_1^e \ln x dx$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

Κώστας Γκούλης