

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

- 1) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
- 2) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο με τετμημένη $\xi \in (0, 1/e)$.
- 3) Να δείξετε ότι:
 - α) Είναι $f(\xi) = -\xi^2 - 2\xi$.
 - β) Ισχύει $\int_{\xi}^1 e^x f(x) dx < e + \xi e^{\xi} (\xi + 2)$.