

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = \ln(g(x) + x), x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{1}{g(x)}, x \in \mathbb{R}$
- $g(x) > 0, g(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = 1$

α. Να βρείτε τους τύπους των f, g

Έστω $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

β. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την ανίσωση

$$f(x^2 + 2) + f(2x) > f(x^2) + f(2x + 2)$$

γ. i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} dt$

ii. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\ln^2(\sqrt{2} + 1)} \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} dt + 2 \int_0^1 \varphi(x) dx$$