

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f'(x))^2 + f''(x) = 0$ για κάθε $x > -1$ και $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in (-1, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι η g' είναι σταθερή.

β. Να δείξετε ότι $g(x) = x + 1$, $x > -1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Να βρείτε τον τύπο της f .

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x = e - 1$.