

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf'(x) - f(x) = x^2 e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$.

i) Να βρείτε την συνάρτηση f .

ii) Αν $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$,

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \eta \mu x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \eta \mu \frac{1}{x})$

δ. Να αποδείξετε ότι $e^2 f(x) + x + 4 \geq 0$ για κάθε $x \in [-2, +\infty)$.

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.