

ΑΣΚΗΣΗ 4-2023

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ διέρχεται από το σημείο $N(\frac{1}{2}, \frac{2}{e})$.

1. Να δείξετε ότι $f(1) = e^{-1}$.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{x^2} f(x)$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f .

3. Αν $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 + f(1) + 1$

ii) Αν F είναι μία αρχική της f με $F(1)=0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_F και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

iii) Να αποδείξετε ότι: $(1 + \lambda)F(\lambda) \geq F(\lambda^2)$ για κάθε $\lambda \geq 1$.