

Έστω συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \geq \frac{3f(1)+f(3)}{4}$ για κάθε $x \in [1, 4]$.
- $|f''(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Να δείξετε ότι:

i) $f(1) = f(3)$

ii) $f'(3) = 0$

iii) Η f έχει δυο κρίσιμα σημεία και ένα πιθανό σημείο καμπής.

iv) $|f'(x)| \leq 2|x - 3|$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Αν επιπλέον η f'' είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στις θέσεις 1, 3, δυο τοπικά μέγιστα και ένα σημείο καμπής.