

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & , x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

ii) Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

v) Αν F μια αρχική της f να δείξετε ότι ισχύει $F(x) \geq x + F(0)$ για κάθε $x > -1$.

vi) Να δείξετε ότι $1 < \int_{-\frac{1}{2}}^0 2f(x)dx < \ln 4$