

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)(e^{f(x)} - x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.
Στη συνέχεια, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$.

iii) Να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

iv) Να δείξετε ότι $0 < \int_0^{-1} f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx < 1$

v) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu f(x)}{x^2} \ln(x+1) \right)$.