

Θέμα 2

14666

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

15002

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

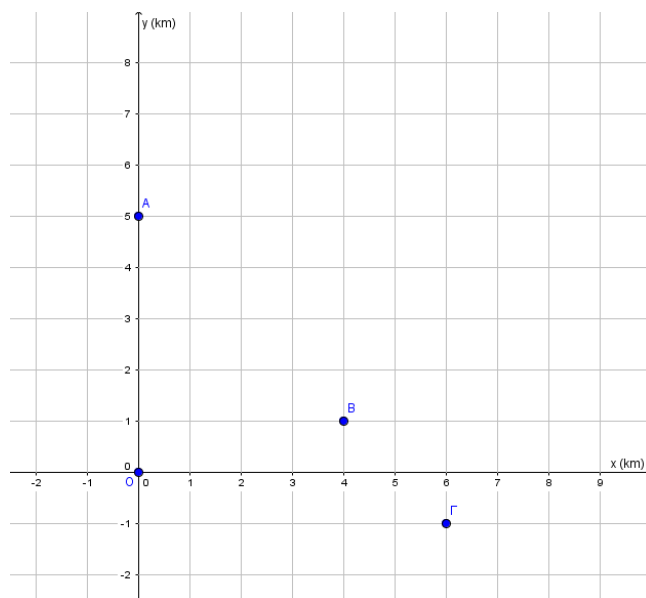
(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5), B(4,1)$ και $\Gamma(6, -1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ .

(Μονάδες 12)

15854

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

16147

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 06)

16151

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x'x.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

(Μονάδες 09)

16579

Δίνονται τα σημεία A(2,1) και B(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\vec{AB}$.

(Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \vec{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

(Μονάδες 10)

16580

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A(2,4), B(11,5), Γ(3,7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\vec{AD}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

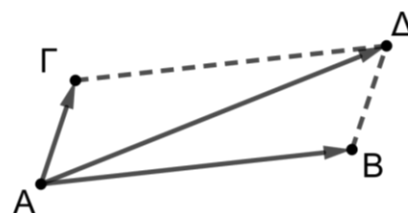
(Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\vec{AD}$.

(Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ.

(Μονάδες 05)



16581

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A(-1, 6), B(1, 2) και Γ(3, -2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{BG}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AG.

(Μονάδες 07)

17070

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

18878

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4), \quad \overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:

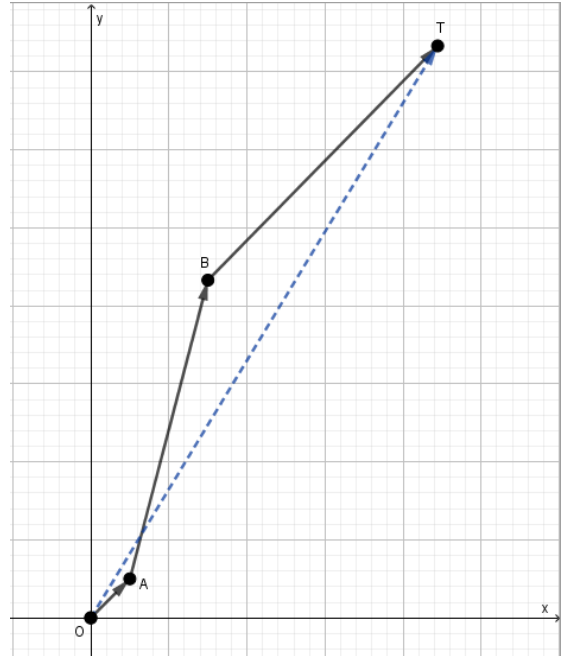
Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

(Μονάδες 12)



19038

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

21681

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 7)

22038

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

(Μονάδες 13)

22044

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A, B, Γ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

22052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2,5)$ και $\vec{\beta} = (1,-3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (8,-21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

22060

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

(Μονάδες 13)

22557

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0,8)$, $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

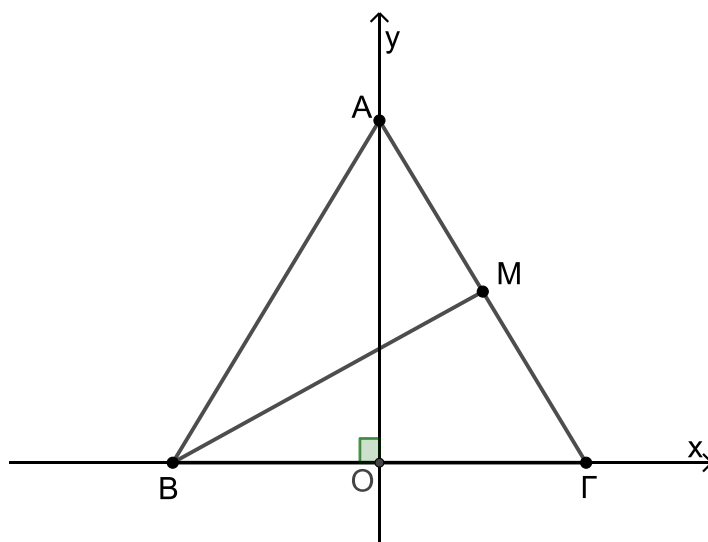
(Μονάδες 9)

ii. $M(3,4)$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

(Μονάδες 7)



Θέμα 4

17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4$.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

17077

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)
- γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

20938

Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$

- α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$. (Μονάδες 07)