

Θέμα 2

16128 (Μονάδες 10 – 5 – 10)

Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .
- β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C) , να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.
- γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) .

17942 (Μονάδες 12 – 13)

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.
- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C) .

20721 (Μονάδες 8 – 8 – 9)

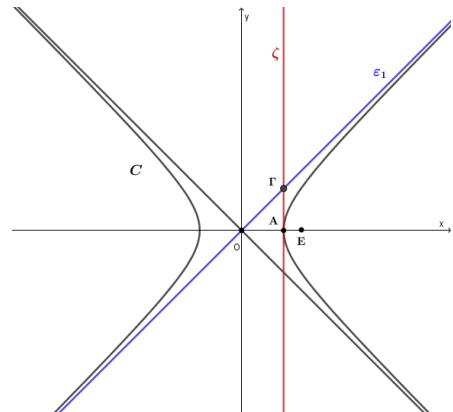
Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της C .
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της C .
- γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

20869 (Μονάδες 10 – 7 – 9)

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E , η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1, 0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.

- α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής.
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ .
- ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1, 1)$.



21218 (Μονάδες 12 – 13)

Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1$, $(C_2): y^2 - x^2 = 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0), E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.
- β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1 E_2 E'_1 E'_2$ είναι τετράγωνο.

21649 (Μονάδες 10 – 8 – 7)

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5, 0), E'(-5, 0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της C .
- β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .
- γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

21651 (Μονάδες 10 – 8 – 7)

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5, 0), E'(-5, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

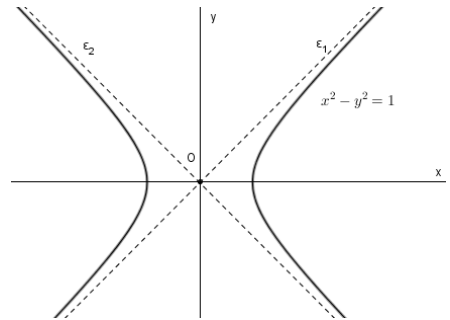
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

22051 (Μονάδες 13 – 12)

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 της υπερβολής ότι:

α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.



22169 (Μονάδες 10 – 5 – 10)

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$.

22196 (Μονάδες 10 – 10 – 5)

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση: $x^2 - y^2 = 25$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1), (ϵ_2) της υπερβολής.

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1), (ϵ_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22269 (Μονάδες 5 – 5 – 5 – 10)

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας:

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$.

22559 (Μονάδες 12 – 8 – 5)

Η υπερβολή στο διπλανό σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

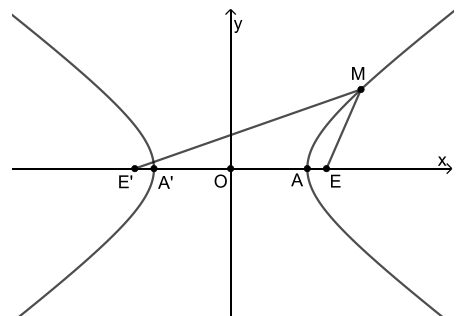
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$.

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' .



22561 (Μονάδες 8 – 8 – 9)

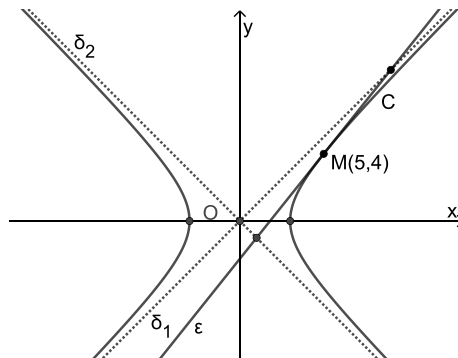
Στο διπλανό σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x - 4y = 9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 .



22566 (Μονάδες 8 – 9 – 8)

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1, 0)$ και $A'(-1, 0)$

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

22567 (Μονάδες 10 – 10 – 5)

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

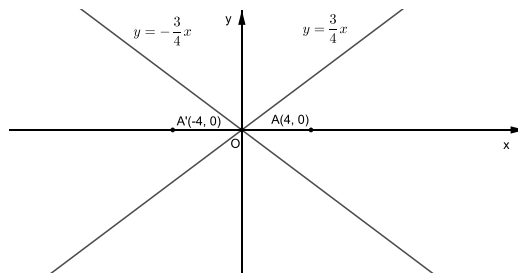
τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$,

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

β) Να σχεδιάσετε το διπλανό σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .



Θέμα 4

20653 (Μονάδες 8 – 8 – 9)

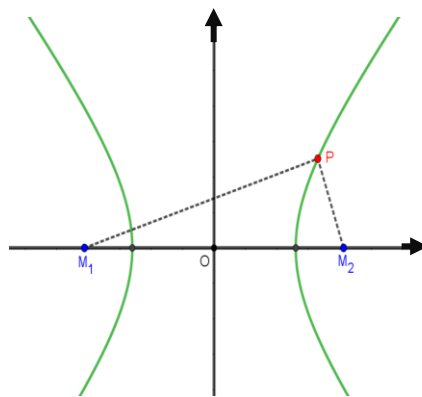
Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .

α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε

ότι: $(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m}$. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec .

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 .

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση $(M_1 M_2)$ είναι 1378 m , να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία $M_1 M_2$ και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$.



21656 (Μονάδες 3 – 3 – 9 – 5 – 5)

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

- i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C .
- ii. την εξίσωση της υπερβολής C .

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C , τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C .

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C , να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME) - (ME')$.

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της C , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

22174 (Μονάδες 9 – 9 – 7)

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

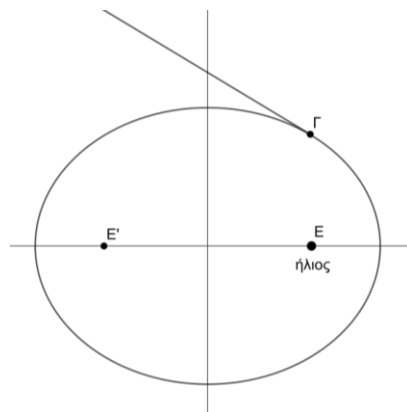
β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$

εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα $O\gamma$. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0,5)$.

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;



32206 (Μονάδες 7 – 6 – 6 – 69)

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5, \frac{9}{4})$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.